فرم مختلط سری فوریه :

با استفاده از فرمولهای اویلر ، سری فوریه را می توان بصورت مختلط نوشت

$$cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{۲} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{۲i}$$

$$f(t) = \sum_{n=\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{۲\pi}{T}nt} \qquad c_n = \frac{۱}{T}\int_T f(t)e^{-i\frac{۲\pi}{T}nt}\,dt$$

c_n بر حسب a_n و b_n :

$$\begin{cases} a_n = c_n + c_{-n} \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) \end{cases}$$

$$c_n = \frac{۱}{۲}(a_n - ib_n)$$

خواص سری فوریه مختلط:

در سری فوریه به فرم مختلط ؛ اگر c_n و d_n به ترتیب ضرایب سری فوریه $f(x)$ و $g(x)$ باشد ، داریم :

$$f(x-a) \leftrightarrow c_n e^{-in\frac{۲\pi}{T}a}$$

$$e^{ia\frac{۲\pi}{T}x} f(x) \leftrightarrow \mathrm{c_{n-a}}$$

$$f(-x) \leftrightarrow c_{-n}$$

$$\int_T f(\lambda) g(x-\lambda) d\lambda \leftrightarrow T c_n d_n$$

$$f(x) g(x) \leftrightarrow \sum_{i=\infty}^{\infty} c_i d_{n-i}$$

$$f'(x) \leftrightarrow in\frac{۲\pi}{T} c_n$$

$$\left(c_{\cdot} = \cdot \text{ با شرط}\right) \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \leftrightarrow \frac{T}{۲\pi i n} c_n$$

قضیه پارسوال برای سری فوریه مختلط بصورت زیر بیان می شود :

$$\frac{۲}{T}\int_{T} f^{۲}(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^{۲}$$

مثال :

سری فوریه مختلط $f(x)=e^x$ در بازه $-\pi < x < \pi$ را بدست آورید .

$$c_n = \frac{۱}{T}\int_T f(x)e^{-i\frac{۲\pi}{T}nx}dx = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx}dx =$$

$$\frac{۱}{۲\pi}\frac{۱}{(۱-in)}e^{(-۱-in)x}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{۱}{۲\pi}\frac{۱}{۱-in}\times\frac{۱+in}{۱+in}(e^{(۱-in)\pi} - e^{-(۱-in)\pi})$$

$$= \frac{۱}{۲\pi}.\frac{۱+in}{۱+n^۲}\{e^{\pi}(\cos n\pi - i\sin n\pi) - e^{-\pi}(\cos n\pi + i\sin n\pi)\}$$

$$= \frac{۱}{۲\pi}.\frac{۱+in}{۱+n^۲}\{e^{\pi}(-۱)^n - e^{-\pi}(-۱)^n\} = \frac{(-۱)^n}{\pi}.\frac{۱+in}{۱+n^۲}\sinh\pi$$

مثال :

سری فوریه مختلط تابع $f(x)=\frac{۱}{cosx}$ در بازه $\cdot < x < \frac{\pi}{۴}$ بصورت $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۴}}nx}$ می باشد . حاصل $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^۲$ را بدست آورید

طبق رابطه پارسوال داریم :

$$\frac{۱}{T}\int_T f^۲(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^۲$$

$$\rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^۲ = \frac{۱}{\frac{\pi}{۴}}\int_{\cdot}^{\frac{\pi}{۴}}\left(\frac{۱}{\cos x}\right)^۲dt = \frac{۴}{\pi}\tan x\Big|_{\cdot}^{\frac{\pi}{۴}} = \frac{۴}{\pi}$$

انتگرال فوریه

رفتار یک تابع غیر تناوبی که در فاصله ($-\infty$ و $+\infty$) تعریف شده است را نمی توان از طریق یک سری فوریه توصیف نموده. اما اگر $f(x)$ در فاصله ($-\infty$ و $+\infty$) مطلقاً انتگرال پذیر باشد یعنی $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx < \infty$، آنگاه $f(x)$ را می توان در قالب یک بیان انتگرالی از جملات سینوسی و کسینوسی که به انتگرال فوریه تابع مرسوم است به فرم زیر نوشت :

$$\begin{cases} f(t) = \int_{.}^{\infty} (a(\omega)\cos\omega t + b(\omega)\sin\omega t)\,d\omega \\ a(\omega) = \frac{۱}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt \\ b(\omega) = \frac{۱}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt \end{cases}$$

اگر f(t) تابعی زوج باشد آنگاه

$$a(\omega) = \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty} f(t)\cos\omega t\, dt \qquad b(\omega) = ۰$$

اگر f(t) تابعی زوج باشد آنگاه

$$a(\omega) = ۰ \qquad b(\omega) = \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty} f(t)\sin\omega t\, dt$$

تساوی پارسوال برای انتگرال فوریه بصورت زیر بیان می شود :

$$\frac{۱}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f^{۲}(t)dt = \int_{۰}^{\infty}(a^{۲}(\omega) + b^{۲}(\omega))d\omega$$

مثال :

اگر $\int_{۰}^{\infty} a(\omega)\cos\omega t\, d\omega = \begin{cases} \frac{\cos t}{۲} & |t| < \frac{\pi}{۲} \\ ۰ & |t| < \frac{\pi}{۲} \end{cases}$ باشد ، $a(\omega)$را بدست آورید .

چون $f(t)$زوج است .

$$a(\omega) = \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty} f(t)cos\omega tdt$$

$$a(\omega) = \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty}\frac{۱}{۲}cost\ cos\omega t\ dt = \frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}(\cos(۱+\omega)\,t + \cos\,(۱-\omega)t)dt$$

$$= \frac{۱}{۲\pi}\left(\frac{\sin(۱+\omega)\,t}{۱+\omega} + \frac{\sin(۱-\omega)\,t}{۱-\omega}\right]_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} = \frac{۱}{۲\pi}\left(\frac{\cos\frac{\omega\pi}{۲}}{۱+\omega} + \frac{\cos\frac{\omega\pi}{۲}}{۱-\omega}\right)$$

$$= \frac{۱}{۲\pi}\cos\frac{\omega\pi}{۲}.\frac{۲}{۱-\omega^{۲}} = \frac{\cos\frac{\omega\pi}{۲}}{\pi(۱-\omega^{۲})}$$

مثال :

اگر $f(t) = \int_{۰}^{\infty} a(\omega) cos\, \omega t\, d\omega$ باشد آنگاه انتگرال فوریه $t^{۲} f(t)$ به چه صورت خواهد بود ؟

$$a(\omega) \frac{۲}{\pi} \int_{۰}^{\infty} f(t) \cos \omega t\, dt \qquad \frac{da(\omega)}{d\omega} = \frac{۲}{\pi} \int_{۰}^{\infty} f(t) \times (-t) sin\omega t dt$$

بنابراین

$$t^{۲} \mathrm{f(t)} = \int_{۰}^{\infty} \left(-\frac{\mathrm{d^{۲}a(\omega)}}{\mathrm{d\omega^{۲}}} \right) \mathrm{cos\omega t d\omega}$$