تبدیلات فوریه کسینوسی و سینوسی

فرض کنید $f(x)$ در فاصله $(0\,,+\infty)$ تکه‌ای هموار و مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد:

الف) تبدیل فوریه کسینوسی تابع چنین تعریف می‌شود:

$$F_c(f)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx=\tilde{f}_c(\omega)$$

تبدیل فوریه کسینوسی معکوس $\tilde{f}_c(\omega)$ که تابع $f(x)$ را نتیجه می‌دهد، چنین تعریف می‌کنیم:

$$F_c^{-1}(\tilde{f})=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} \tilde{f}_c(\omega)\cos\omega x\,d\omega=f(x)$$

ب) تبدیل فوریه سینوسی تابع چنین تعریف می‌شود:

$$F_s(\tilde{f})=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx=\tilde{f}_s(\omega)$$

تبدیل فوریه سینوسی معکوس $\tilde{f}_s(\omega)$ که تابع $f(x)$ را نتیجه می‌دهد چنین تعریف می‌کنیم:

$$F_s^{-1}(\tilde{f}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{f}_s(\omega) \sin\omega x \; d\omega = f(x)$$

می‌توان نشان داد هرگاه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ باشد آنگاه خواهیم داشت:

$$F_s(f') = -\omega F_c(f)$$

$$F_c(f') = \omega F_s(f) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, f(0)$$

$$F_s(f'') = -\omega^2 F_s(f) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \omega f(0)$$

$$F_c(f'') = -\omega^2 F_c(f) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, f'(0)$$

تذکر: مطابق اتحادهای پارسوال داریم:

$$\int_0^{\infty} F_c^2(\omega)\,d\omega = \int_0^{\infty} f^2(x)\,dx \quad \text{و} \quad \int_0^{\infty} F_s^2(\omega)\,d\omega = \int_0^{\infty} f^2(x)\,dx$$

مثال ۴۶ تبدیل کسینوسی فوریه تابع $f(x) = e^{-\frac{1}{3}x}$ کدام است؟ (هوافضا)

۱) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{\frac{1}{3}+\omega^2}\right)$ ۲) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{3}{1+9\omega^2}\right)$ ۳) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{3}{9+\omega^2}\right)$ ۴) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{1+\omega^2}\right)$

حل: گزینه ۲ درست است.

$$F_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{3}x}\cos\omega x\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(L(\cos\omega x)\right)\Big|_{s=\frac{1}{3}}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{s}{s^2+\omega^2}\Big|_{s=\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{9}+\omega^2}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{3}{1+9\omega^2}$$

مثال ۴۷ با توجه به تبدیل فوریه سینوسی تابع $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & x>1\end{cases}$ حاصل $\int_0^\infty \left(\frac{1-\cos x}{x}\right)^2 dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{8}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) π ۴) $\frac{\pi}{4}$

حل: گزینه ۲ درست است.

$$F_s(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^1(1)\sin\omega x\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{-1}{\omega}\cos\omega x\Big|_0^1=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1-\cos\omega}{\omega}$$

با توجه به تساوی پارسوال داریم:

$$\int_0^\infty \{F_s(\omega)\}^2 d\omega=\int_0^\infty\{f(x)\}^2dx \;\to\; \int_0^\infty \frac{2}{\pi}\left(\frac{1-\cos\omega}{\omega}\right)^2 d\omega=\int_0^1(1)^2dx \;\to$$

$$\int_0^\infty\left(\frac{1-\cos\omega}{\omega}\right)^2 d\omega=\frac{\pi}{2}$$

مثال ۴۸ تبدیل فوریه سینوسی $f(t)=\frac{e^{-at}}{t}$ برابر کدام است؟ (برق ۸۷)

۱) $\frac{a}{a^2+\omega^2}$ ۲) $\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$ ۳) $\tan\frac{\omega}{a}$ ۴) $\frac{\omega}{a^2+\omega^2}$

حل: گزینه ۲ درست است.

$$F_s(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-at}}{t}\sin\omega t\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(L\left(\frac{\sin\omega t}{t}\right)\right)\Bigg|_{s=a}$$

اما می‌دانیم:

$$L\left(\frac{\sin\omega t}{t}\right)=\int_s^{+\infty}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}ds=\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{s}{\omega}\right)\right)\Bigg|_s^{+\infty}=\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{+\infty}{\omega}\right)-\mathrm{Arctan}\left(\frac{s}{\omega}\right)\right)=\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}\frac{s}{\omega}\right)$$
$$=\mathrm{Arctan}\frac{\omega}{s}$$

لذا داریم:

$$F_s(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{Arctan}\frac{\omega}{s}\Bigg|_{s=a}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{Arctan}\frac{\omega}{a}$$

توجه داریم عدم حضور $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ در گزینه صحیح (یعنی گزینه دوم) مربوط به تعریف می‌شود.

مثال ۴۹ تبدیل فوریه کسینوسی تابع $f(x)=e^{-x}\cos x$ کدام است؟

۱) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2}{\omega^4+4}$ ۲) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega^2+2}{\omega^4+4}$ ۳) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega^2+2\omega+2}{\omega^4+4}$ ۴) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega^2}{\omega^4+4}$

حل: گزینه ۲ درست است.

$$F_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-x}\cos x\cos\omega x\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-x}}{2}\left(\cos(1+\omega)x+\cos(1-\omega)x\right)dx$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\left\{L\left(\cos(1+\omega)x+\cos(1-\omega)x\right)\right\}\Big|_{s=1}=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\left(\frac{s}{s^2+(1+\omega)^2}+\frac{s}{s^2+(1-\omega)^2}\right)\Bigg|_{s=1}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\left(\frac{1}{1+(1+\omega)^2}+\frac{1}{1+(1-\omega)^2}\right)=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\ \frac{\left(\omega^2+2-2\omega\right)+\left(\omega^2+2+2\omega\right)}{\left(\omega^2+2+2\omega\right)\left(\omega^2+2-2\omega\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\ \frac{2\left(\omega^2+2\right)}{\left(\omega^2+2\right)^2-(2\omega)^2}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega^2+2}{\omega^4+4}$$

مثال ۵۰ تبدیل فوریه کسینوسی تابع $f(x) = xe^{-ax}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega^2 - a^2}{\left(a^2 + \omega^2\right)^2}$ ۲) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a^2 - \omega^2}{\left(a^2 + \omega^2\right)^2}$ ۳) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega^2 - a^2}{\left(a^2 + \omega^2\right)}$ ۴) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a^2 - \omega^2}{\left(a^2 + \omega^2\right)}$

حل: گزینه ۲ درست است.

$$F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty xe^{-ax}\cos\omega x\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{L(x\cos\omega x)\right\}\Big|_{s=a}$$

اما می‌دانیم:

$$L(\cos\omega x)=\frac{s}{s^2+\omega^2} \rightarrow L(x\cos\omega x)=-\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+\omega^2}\right)=-\frac{(1)\left(s^2+\omega^2\right)-(2s)(s)}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}=\frac{s^2-\omega^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$$

پس داریم:

$$F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a^2 - \omega^2}{\left(a^2 + \omega^2\right)^2}$$

مثال ۵۱ با توجه به انتگرال فوریه سینوسی تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & 0<x<\pi \\ 0 & x>\pi\end{cases}$ تبدیل فوریه سینوسی تابع $\frac{1-\cos\pi x}{x}$ کدام است؟

۱) $\begin{cases}\frac{2}{\pi} & 0<\omega<\pi \\ 0 & \omega>\pi\end{cases}$

۲) $\begin{cases}\frac{\pi}{2} & 0<\omega<\pi \\ 0 & \omega>\pi\end{cases}$

۳) $\begin{cases}\frac{\pi}{4} & 0<\omega<\pi \\ 0 & \omega>\pi\end{cases}$

۴) $\begin{cases}\frac{4}{\pi} & 0<\omega<\pi \\ 0 & \omega>\pi\end{cases}$

اگر تابع $f(x)$ را به فرم فرد گسترش دهیم و سپس برایش انتگرال فوریه بنویسیم داریم:

$$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x dx=\frac{2}{\pi}\left\{\int_0^\pi\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\omega x dx+\int_\pi^\infty(0)\sin\omega x dx\right\}=-\frac{1}{\omega}\cos\omega x\Big|_0^\pi$$

$$=\frac{1}{\omega}(1-\cos\omega\pi)$$

لذا انتگرال فوریه سینوسی تابع داده شده چنین است:

$$f(x)=\int_0^{\infty}\frac{1}{\omega}(1-\cos\omega\pi)\sin\omega x d\omega$$

با تبدیل $\omega \rightleftarrows x$ داریم:

$$f(\omega)=\int_0^{\infty}\frac{1-\cos\pi x}{x}\sin x\omega dx$$

سمت راست تساوی فوق تعریف تبدیل فوریه سینوسی تابع $\frac{1-\cos\pi x}{x}$ است.

لذا گزینه موردنظر جواب دوم می‌باشد.