تبدیل فوریه

اگر $f(x)$ تابعی تکه‌ای هموار و در بازه $(-\infty\ ,\ +\infty)$ مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد، دارای تبدیل فوریه است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F\left(f(x)\right) = F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx$$

همچنین با دانستن تبدیل فوریه یک تابع، خود تابع از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$F^{-1}\left(F(\omega)\right) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega$$

توجه: برخی در تعریف تبدیل فوریه به‌جای ضریب $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ضریب $\frac{1}{2\pi}$ را قرار داده و در رابطه معکوس تبدیل فوریه ضریب $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ را نمی‌نویسند.

تذکر: اگر تابعی به صورت $\begin{cases} f(x) & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ تعریف شده باشد، برای محاسبه تبدیل فوریه آن کافی است تبدیل لاپلاس تابع را به دست آورده و در آن s را به $i\omega$ تبدیل کنیم.

خواص تبدیل فوریه و قضایای تبدیل فوریه

چنانچه تعریف کنیم:

$$F\big(f(x)\big) = F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx$$

$$F^{-1}\big(F(\omega)\big) = f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega$$

۱ـ قضیه خطی بودن تبدیل فوریه: برای هر دو عدد ثابت c_2 و c_1 داریم:

$$F\left\{c_1 f(x) + c_2 g(x)\right\} = c_1 F(\omega) + c_2 G(\omega)$$

۲ـ قضیه تبدیل فوریه مشتق: اگر f تابعی n بار مشتق‌پذیر باشد به طوری‌که:

$$\lim_{|x| \to \infty} f(x) = \lim_{|x| \to \infty} f'(x) = \cdots = \lim_{|x| \to \infty} f^{(n-1)}(x) = 0$$

آنگاه:

$$F\left\{f^{(n)}(x)\right\} = (i\omega)^n F\left\{f(x)\right\}$$

۳ـ قضیه انتگرال: اگر $F\left\{f(x)\right\} = F(\omega)$ باشد؛ آنگاه:

$$F\left\{\int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt\right\} = \frac{1}{i\omega} F(\omega) + \pi F(0)\delta(\omega)$$

۴ـ قضیه تقارن: اگر $F\left\{f(x)\right\} = F(\omega)$ باشد آنگاه:

$$F\left\{F(x)\right\} = 2\pi f(-\omega)$$

۵ ـ قضیه اول انتقال: اگر $F\left\{f(x)\right\} = F(\omega)$ و a عددی ثابت باشد آنگاه:

$$F\left\{f(x-a)\right\} = e^{-ia\omega} F(\omega)$$

۶ ـ قضیه دوم انتقال: اگر $F\{f(x)\} = F(\omega)$ باشد آنگاه:

$$F\left(e^{iax} f(x)\right) = F(\omega - a)$$

۷ـ قضیه معکوس زمان: اگر $F\{f(x)\} = F(\omega)$ باشد آنگاه:

$$F\{f(-x)\} = F(-\omega)$$

۸ ـ قضیه مشتق‌گیری از تبدیل فوریه: اگر $F\{f(x)\} = F(\omega)$ آنگاه:

$$F\left(x^n f(x)\right) = i^n \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$$

۹ـ تعریف انتگرال هم‌گردشی (کانولوشن) و قضایای آن:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g(x-t)\, dt$$

$$F(f * g) = F(\omega)\, G(\omega)$$

$$F(f(x)\, g(x)) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * G(\omega)$$

۱۰ـ قضیه مقیاس: اگر $F\{f(x)\} = F(\omega)$ آنگاه:

$$F(f(ax)) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

۱۱ـ قضیه پارسوال: اگر $F(f(x)) = F(\omega)$ آنگاه:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega$$

مثال ۵۳ تبدیل فوریه توابع زیر را به دست آورید.

۱) $f(x)=e^{-a|x|}$

۲) $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<a\\ 0 & |x|>a\end{cases}$

۳) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+a^2}$

۴) $f(x)=\dfrac{\sin ax}{x}$

۵) $f(x)=e^{-ax^2}$

۶) $f(x)=\operatorname{Arc}\cot x$

حل:

۱ـ طبق تعریف داریم:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a|x|}e^{-i\omega x}dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a|x|}(\cos\omega x-i\sin\omega x)\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{e^{-a|x|}\cos\omega x}_{\text{تابع زوج}}\,dx-i\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{e^{-a|x|}\sin\omega x}_{\text{تابع فرد}}\,dx$$

$$=2\int_{0}^{\infty}e^{-a|x|}\cos\omega x\,dx=2\int_{0}^{\infty}e^{-ax}\cos\omega x\,dx=2\left(L(\cos\omega x)\right)\Big|_{s=a}=2\frac{s}{s^2+\omega^2}\Big|_{s=a}=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

۲ـ طبق تعریف داریم:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx=\int_{-a}^{a}1\,e^{-i\omega x}dx=-\frac{1}{i\omega}e^{-i\omega x}\Big|_{-a}^{a}=\frac{1}{i\omega}\left(e^{i\omega a}-e^{-i\omega a}\right)=\frac{2}{\omega}\cdot\frac{e^{i\omega a}-e^{-i\omega a}}{2i}$$

$$=\frac{2}{\omega}\sin a\omega$$

۳ـ دیدیم تبدیل فوریه $e^{-a|x|}$ به صورت $\frac{2a}{\omega^2+a^2}$ است، لذا طبق قضیه تقارن داریم:

$$F\left(\frac{2a}{x^2+a^2}\right)=2\pi\, e^{-a|-\omega|} \quad\rightarrow\quad F\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)=\frac{\pi}{a}\, e^{-a|\omega|}$$

۴ـ دیدیم تبدیل فوریه $\begin{cases}1 & |x|<a\\ 0 & |x|>a\end{cases}$ به صورت $\frac{2\sin a\omega}{\omega}$ است، لذا طبق قضیه تقارن داریم:

$$F\left(\frac{2\sin ax}{x}\right)=2\pi\begin{cases}1 & |-\omega|<a\\ 0 & |-\omega|>a\end{cases} \quad\rightarrow\quad F\left(\frac{\sin ax}{x}\right)=\begin{cases}\pi & |\omega|<a\\ 0 & |\omega|>a\end{cases}$$

۵ـ

$$f'(x)=-2axe^{-ax^2}=-2axf(x) \quad\rightarrow\quad F\left(f'(x)\right)=F\left(-2axf(x)\right) \quad\rightarrow\quad i\omega F(\omega)=-2ai\frac{dF(\omega)}{d\omega} \quad\rightarrow$$

$$\frac{dF}{F(\omega)}=-\frac{\omega}{2a}d\omega \quad\xrightarrow{\int}\quad \ln F(\omega)=-\frac{\omega^2}{4a}+c \quad\rightarrow\quad F(\omega)=ke^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

برای محاسبه k توجه داریم:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-i\omega x}dx \;\rightarrow\; F(0)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx \;\rightarrow\; F(0)=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

پس باید $k=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ و به دست می‌آید:

$$F(\omega)=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

۶ـ

$$f(x)=\operatorname{Arc}\cot x \;\rightarrow\; f'(x)=\frac{-1}{1+x^2} \;\rightarrow\; F(f'(x))=F\left(\frac{-1}{1+x^2}\right) \;\rightarrow\; i\omega F(\omega)=-\pi e^{-|\omega|} \;\rightarrow$$

$$F(\omega)=\frac{-\pi e^{-|\omega|}}{i\omega}$$