فصل دوم معادلات دیفرانسیل معمولی

تعاریف :

1. معادله ای که یک متغیر وابسته را از طریق مشتقش به یک یا چند متغیر مستقل ارتباط دهد معادله دیفرانسیل می گویند.
2. اگر فقط یک متغیر مستقل وجود داشته باشد آن را معادله دیفرانسیل معمولی می گویند.
3. اگر دو یا چند متغیر مستقل وجود داشته باشد و جملات مشتقی نسبت به هریک از آنها باشد معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی می گویند.
4. معادله دیفرانسیل خطی : معادله دیفرانسیلی که در آن حاصلضرب تابع و مشتق های آن وجود نداشته باشد.
5. معادله دیفرانسیل غیر خطی : در صورتیکه در معادله حاصلضرب تابع و مشتق های آن وجود داشته باشد ، معادله غیر خطی خواهد شد.
6. مرتبه : بالاترین مرتبه مشتق موجود در آن را مرتبه معادله گویند.
7. درجه : بالاترین توان جمله مشتقی است که بالاترین مرتبه را نیز داراست .

مثال : معادله دیفرانسیل $\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^2y}{dx^2}+5(\frac{dy}{dx})^2+2x^3\frac{dy}{dx}+4y=4e^x\cos x$

1. معادله دیفرانسیل معمولی است. چون یک متغیر مستقل دارد.
2. مرتبه سه است .
3. درجه اول است. چون توان مرتبه 3 آن یک است.
4. معادله بالا غیر خطی است زیرا شامل $(\frac{dy}{dx})^2$ (یعنی حاصلضرب مشتق تابع در مشتق تابع) می باشد.

**حل معادله دیفرانسیل مرتبه اول معمولی :**

$$\boxed{P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0}$$

وقتی معادله دیفرانسیل حل می شود که خالی از مشتق باشد. این حل ممکن است دارای ضرائب ثابت باشد که مقدار این ضرائب با استفاده از شرایط مرزی و شرایط اولیه بدست خواهد آمد.

فرم کلی معادله دیفرانسیل مرتبه اول معمولی به شکل بالا می باشد که به چندین دسته تقسیم می گردد. پرکاربردترین شکل آنها در فرآیندهای مهندسی شامل:

1) تفکیک پذیر
2) همگن
3) کامل
4) شبه کامل
5) خطی

می باشد که به اختصار به آن می پردازیم.

**1. معادلات تفکیک پذیر :**

معادله تفکیک پذیر به شکل کلی $M(x)\,dx+N(y)\,dy=0$ می باشد که در آن:

- ضریب $dx$ فقط تابعی از $x$ است . $\Leftarrow$ $P(x,y)=M(x)$
- ضریب $dy$ فقط تابعی از $y$ است. $\Leftarrow$ $Q(x,y)=N(y)$

برای حل این نوع معادله کافیست انتگرال گیری گردد.

$\int M(x)dx +$

$\int N(y)dy = C$

راهنما 1) اگر معادله به صورت $f_1(x)f_2(y)dx + f_3(x)f_4(y)dy = 0$ باشد طرفین را بر $f_2(y)f_3(x)$ تقسیم می کنیم .

راهنما 2) معادلاتی به فرم $y' = f(ax' + by + c)$ را می توان با تغییر متغیر $U = ax + by + c$ به فرم تفکیک پذیر تبدیل نمود.

مثال 1) معادله زیر را حل نمایید. ( معادله با استفاده از راهنمای اول حل می گردد ) $\frac{dy}{dx} = x\, e^{x+y+1}$

(کار کلاسی )

$$\frac{dy}{dx} = xe^x.e^{y+1} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{e^{y+1}} = xe^x\,dx$$

$$e^{-(y+1)}\,dy = xe^x\,dx \Rightarrow \int e^{-(y+1)}\,dy = \int xe^x\,dx \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \int e^u du = u'e^u \\ u = y+1 \;\rightarrow du = dy \\ \int e^{-(y+1)} = -e^{-(y+1)} \end{cases}$$

$$\text{و} \quad \begin{cases} \int UV' = uv - \int v\,u' \\ v' = e^x \qquad u = x \\ \int x\,e^x\,dx = xe^x - e^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow -e^{-(y+1)} = e^x(x-1) + c$$

مثال 2) معادله مقابل را حل کنید.

$$\frac{dy}{dx} = (y-4x)^2$$

برای حل این معادله از راهنمای 2 استفاده می نماییم.

$$\begin{cases} y - 4x = u \\ \frac{dy}{dx} - 4 = \frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = u^2 - 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u^2-4} = dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4}\ln\frac{u-2}{u+2} = x + c$$

$$\rightarrow \quad \ln\frac{y-4x-2}{y-4x+2} = 4x + c'$$

یادآوری 1 : $\boxed{\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2}a\,\ln\frac{x+a}{x-a} + c}$

**جواب عمومی و خصوصی :**

حالت کلی پاسخ که در آن ضرائب ثابت بصورت پارامتری ارائه می شوند، جواب عمومی حل معادله دیفرانسیل است. با اعمال شرایط اولیه یا شرایط مرزی، مقادیر ضرائب ثابت مشخص شده و جواب خصوصی حاصل می شود.

مثال 3) جواب خصوصی معادله دیفرانسیل ارائه شده را بیابید.

$$\frac{dy}{dx} = xy^2 + y^2 + x + 1 \qquad , \qquad y(1)=0$$

برای حل این معادله از راهنمای 1 استفاده می شود .

$\frac{dy}{dx}=(y^2+1)(x+1) \quad \Rightarrow \quad \int\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{y}^2+1}=\int(\mathrm{x}+1)\mathrm{dx}$

$\tan^{-1}y=\frac{1}{2}x^2+x+c \quad \xRightarrow{\text{با اعمال شرایط ثابت}} \quad \tan^{-1}(0)=\frac{1}{2}+1+c \quad \Rightarrow \quad c=-\frac{3}{2}$

$\mathrm{y}=\tan(\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2})$

یاد آوری 2:

$\boxed{\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+c}$ , $\boxed{\tan^{-1}x=arc\tan x}$

### 2. معادلات همگن

تابع $f(x,y)$ را همگن گوییم اگر در معادله به جای $x$، $\lambda$x و به جای y ، $\lambda$y قرار دهیم، در انتها بتوان تابع $f(x,y)$ را مجدداً از آن فاکتورگیری کرد یعنی به صورت $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^\alpha f(x,y)$ بدست آورد که α نشان دهنده درجه همگنی می باشد مانند مثال های زیر :

- $\mathrm{x}^2+\mathrm{xy}+\mathrm{y}^2$ همگن از درجه دو، زیرا : $(\lambda x)^2+(\lambda x.\lambda y)+(\lambda y)^2=\lambda^2(x^2+xy+y^2)$
- $\mathrm{x}\sin\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}$ همگن از درجه اول زیرا : $\lambda x\ \sin\frac{\lambda y}{\lambda x}=\lambda(x\sin\frac{y}{x})$
- $\tan\frac{x}{y}$ همگن از درجه صفر زیرا : $\tan\frac{\lambda x}{\lambda \mathrm{y}}=\lambda^0(\tan\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}})$

هر معادله دیفرانسیل به فرم *P(x,y) dx+ Q(x,y) dy=0* را که هر دو همگن از درجه α باشند را یک معادله دیفرانسیل همگن می نامند.

برای حل معادلات همگن ما یک تغییر متغیر انجام داده و آنرا در معادله قرار می دهیم.

$$\mathrm{Y}=\mathrm{vx} \ \Rightarrow \ \mathrm{dy}=\mathrm{v\,dx}+\mathrm{x\,dv}$$

با این تغییر متغیر، معادله همگن، به معادله تفکیک پذیر تبدیل می شود.

مثال 4) معادله زیر را حل کنید.
$2\mathrm{xy\,dy}+(\mathrm{x}^2-\mathrm{y}^2)\mathrm{dx}=0$ ابتدا تفکیک پذیری معادله را بررسی می نمائیم. چون معادله تفکیک پذیر نمی باشد همگن بودن معادله را با انجام تغییر متغیر $\mathrm{x}=\lambda\mathrm{x}$ , $\mathrm{y}=\lambda\mathrm{y}$ بررسی می نماییم.

$2\lambda\mathrm{x}\,\lambda\mathrm{y\,dy}+(\lambda^2\mathrm{x}^2-\lambda^2\mathrm{y}^2)\mathrm{dx}=0$

$\lambda^2(2\mathrm{xy\,dy}+(\mathrm{x}^2-\mathrm{y}^2)\mathrm{dx})=0$

( معادله همگن است، چون می توان از $\lambda^2$ فاکتور گرفت و معادله داخل پرانتز، معادله اصلی ماست. )

بنابراین تغییر متغیر لازم را انجام می دهیم ،
$2\mathrm{x}(\mathrm{vx})(\mathrm{v\,dx}+\mathrm{x\,dv})+(\mathrm{x}^2-\mathrm{v}^2\mathrm{x}^2)\,\mathrm{dx}=0$

$$2v^2x^2\,dx + 2x^3v\,dv + x^2\,dx - v^2x^2\,dx = 0$$

پس معادله را به صورت یک معادله تفکیک پذیر با جداسازی $dv$ و $dx$ تبدیل می نماییم :

$$2vx^3\,dv + (x^2 + x^2v^2)dx = 0$$

$$2vx\,dv + (1 + v^2)\,dx = 0$$

$$\frac{2v}{1+v^2}dv + \frac{dx}{x} = 0 \;\Rightarrow\; \ln x + \ln(1 + v^2) = \ln c \Rightarrow x(1 + v^2) = c \;\Rightarrow\; y^2 + x^2 = cx$$

راهنما 3) معادلات به فرم $y' = f(\frac{ax+by}{cx+ey})$ همگن می باشد.

راهنما 4) معادلات به فرم $y' = f(\frac{ax+by+c}{ex+hy+f})$ که صورت و مخرج دو خط هستند ولی $c$ و $f$ با هم صفر نمی باشند، همگن نیستند ولی قابل تبدیل به معادله همگن می باشند. برای تبدیل به معادله همگن دو راه وجود دارد:

1. اگر دو خط موازی باشند، $u = ax + by$ آنرا تفکیک پذیر می کند که شرط موازی بودن $\frac{a}{e} = \frac{b}{h}$ می باشد.
2. اگر دو خط همدیگر را در $(x_0, y_0)$ قطع نمایند با تغییر متغیر $\begin{cases} X + x_0 = x \\ Y + y_0 = y \end{cases}$ معادله به صورت معادله همگن در می آید که براساس $X$ و $Y$ حل می شود و در انتها $x_0$ و $y_0$ جایگزین می گردد. $x_0$ و $y_0$ بدین صورت بدست می آید که معادله باید به صورت معادله موجود در راهنمای 4 تبدیل گردد یعنی :

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 + c = 0 \\ ex_0 + hy_0 + f = 0 \end{cases}$$

و از این دو معادله دو مجهول $x_0$ و $y_0$ بدست می آید.

مثال 5) $y' = -(\frac{x-2y+3}{2x-4y-3})$

$\frac{a}{e} = \frac{b}{h} = \frac{1}{2}$ پس دو خط موازی هستند و می توان قرارداد $u = x - 2y$ پس

$$\frac{du}{dx} = 1 - 2\frac{dy}{dx} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(1 - \frac{du}{dx})$$

حال به جای $y$ و $dy$ معادل آنها را برحسب $u$ و $du$ قرار می دهیم.

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{du}{dx}\right) = -(\frac{u+3}{2u-3})$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{du}{dx} = -(\frac{u+3}{2u-3})$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{2(u+3)}{2u-3} + 1 = \frac{2u+6+2u-3}{2u-3} = \frac{4u+3}{2u-3}$$

(معادله تفکیک پذیر شد کافیست انتگرال گیری نماییم و در نهایت بجای $u$ معادل آنرا قرار می دهیم.)

$$\frac{2u-3}{4u+3}\,du = dx$$

$$x = \frac{u}{2} - \frac{9}{8}\ln|4u + 3| + c \Rightarrow x = \frac{1}{2}(x - 2y) - \frac{9}{8}\ln|4x - 8y + 3| + c$$

مثال 6)معادله دیفرانسیل مقابل را حل نمایید . $\frac{dy}{dx}=\frac{2(y+1)^2}{(x+y-3)^2}$

با توجه به اینکه $\frac{a}{e}=0$ و $\frac{b}{h}=1$ در نتیجه دو خط موازی نمی باشند بنابراین $x=X+X_0$ و $y=Y+Y_0$ را در معادله قرار می دهیم.

$$\frac{dY}{dX}=\frac{2(Y+Y_0+1)^2}{(X+X_0+Y+Y_0-3)^2}\Rightarrow$$

با توجه به راهنمای 3، شرط همگن بودن این است که در نهایت داشته باشیم $\frac{dY}{dX}=\frac{2Y}{X+Y}$ در نتیجه :

$$\begin{cases} Y_0+1=0 \\ X_0+Y_0-3=0 \end{cases} \overset{\text{پس}}{\Rightarrow} \begin{cases} Y_0=-1 \\ X_0=+4 \end{cases}$$

حال $Y_0$ ,X ,Y و $X_0$ را در معادله بجای y و x قرار می دهیم

$$\frac{dY}{dX}=\frac{2Y^2}{(X+Y)^2}\xrightarrow{\text{معادله همگن شد تغییر متغیر می دهیم}} V=\frac{Y}{X}\Rightarrow dY=V+X\frac{dV}{dX}$$

$$\frac{dY}{dX}=\frac{2V^2X^2}{(X+Y)^2}=\frac{2V^2X^2}{X^2(1+V)^2}=\frac{2V^2}{(1+V)^2}=V+X\frac{dV}{dX}\Rightarrow\frac{dX}{X}=\frac{(1+V)^2}{-V^3-V}dV\Rightarrow\ln X=-\ln V-2\tan^{-1}(V)+c$$

بجای V معادل آنرا قرار می دهیم : $\ln X=-\ln\frac{Y}{X}-2\tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right)+c$

حال بجای X و Y معادل آنها را قرار می دهیم :

جواب نهایی

$$\begin{cases} X=x-4 \\ Y=y+1 \end{cases}\Rightarrow\ln(x-4)=\ln\frac{y+1}{x-4}-2\tan^{-1}\left(\frac{y+1}{x-4}\right)+c$$

### 3. حل معادلات دیفرانسیل کامل

تعریف :

معادله دیفرانسیل به شکل $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ را کامل می گوییم در صورتیکه در آن $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ باشد. در این صورت u(x,y)=c جواب عمومی معادله است که در آن $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)\ \boxed{1} \\ \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)\ \boxed{2} \end{cases}$ خواهد بود.

در نتیجه برای حل اینگونه معادلات از دو روش می توان استفاده نمود، روش اول $u(x,y)=\int P(x,y)dx+f(y)$ که $f(y)$ از تساوی $\boxed{2}$ بدست می آید و در روش دوم $u(x,y)=\int Q(x,y)dy+f(x)$ که $f(x)$ از تساوی $\boxed{1}$ حاصل خواهد شد. برای بدست آوردن $F(y)$ از $u(x,y)$ برحسب y مشتق گرفته و برابر $Q(x,y)$ قرار داده و برای

محاسبه $F(x)$ از $u(x,y)$ مشتق گرفته و برابر $P(x,y)$ قرار می دهیم. پس از ساده کردن طفین تساوی $F(x)$ یا $F(y)$ بدست می آید.

مثال 7) معادله $(2xy+3)dx+(x^2+8y)dy=0$ را حل کنید.

$p(x,y)=2xy+3 \qquad , \qquad Q(x,y)=x^2+8y$

معادله کامل است چون : $\frac{\partial Q}{\partial x}=2x$ , $\frac{\partial P}{\partial y}=2x$

بنابراین برای حل معادله می توان از روش اول یا دوم استفاده نمود.
معمولاً انتخاب روش براساس امکان ساده تر شدن معادله خواهد بود .

$u=\int P(x,y)dx+f(y)=\int(2xy+3)dx+f(y)=x^2y+3x+f(y) \quad \boxed{*}$

برای بدست آوردن $f(y)$ از رابطه اخیر ، برحسب $y$ مشتق گرفته و برابر $Q(x,y)$ قرار می دهیم.

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^2+\frac{\partial f(y)}{\partial(y)}=\underbrace{x^2+8y}_{Q(x,y)}$$

$$\rightarrow f'(y)=8y \xrightarrow{\text{انتگرال گیری}} f(y)=4y^2$$

جواب عمومی

$$\xRightarrow{\text{در رابطه } \boxed{*} \text{ قرار می دهیم}} x^2y+3x+4y^2=c$$

از روش دوم نیز می توانیم به همین جواب برسیم

$$u(x,y)=\int Q(x,y)dy+f(x)=\int(x^2+8y)dY+f(x)=x^2y+4y^2+f(x) \quad \boxed{**}$$

برای بدست آوردن $f(x)$ داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xy+f'(x)=P(x,y)=2x+3 \Rightarrow f'(x)=3 \Rightarrow f(x)=3x$$

$f(x)$ را در معادله $\boxed{**}$ قرار می دهیم:

$$\Rightarrow u(x,y)=x^2y+4y^2+3x=c$$

مثال 8) معادله $(xy^2\cos x+y^2\sin x)dx+(2xy\ \sin x+1)dy=0$ را حل کنید.

ابتدا شرط کامل بودن را بررسی می کنیم

$$\begin{cases}\frac{\partial P}{\partial y}=2xy\ \cos x+2y\ \sin x\\ \frac{\partial Q}{\partial x}=2xy\ \cos x+2y\ \sin x\end{cases}$$

معادله کامل است. بنابراین داریم :

$$u=\int (xy^2\cos x+y^2\sin x)dx+f(y)$$

$$u=xy^2\sin x+f(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2xy\ \sin x+\frac{\partial f(y)}{\partial y}=\underbrace{2xy\ \sin x+1}_{Q(x,y)}\Rightarrow\frac{\partial f(y)}{\partial y}=1\ \rightarrow\ f(y)=y$$

جواب نهایی

$$\Rightarrow \boxed{xy^2\sin x+y=c}$$

یادآوری :

جهت انتگرال گیری از رابطه $\int x\cos x\ dx$ می توان از روش جزء به جزء استفاده نمود .

$$\begin{cases}x=u\ \ ,\ \ u'=1\end{cases}\Rightarrow\int x\ \cos x\ dx=x\sin x-\int\sin x=x\sin x+\cos x$$

معادلات دیفرانسیل شبه کامل

P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0

معادله دیفرانسیل شبه کامل معادله دیفرانسیلی است که در آن اگر $\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$ باشد با ضرب عامل انتگرال ساز μ در رابطه، آنها را می توان کامل نمود یعنی :

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$$

بنابراین برای حل اینگونه معادلات ابتدا باید عامل انتگرال ساز یعنی (μ) را پیدا نمود سپس با ضرب عامل انتگرال ساز در معادله می توان ، آن را کامل نمود و با استفاده از روش حل معادلات کامل آن را حل نماییم .بنابراین برای حل اینگونه معادلات ابتدا باید عامل انتگرال ساز را بدست آوریم.

1. اگر $\frac{P_y-Q_x}{Q}=f(x)\ \Rightarrow\ \mu=e^{\int f(x)dx}$

2. اگر $\frac{P_y-Q_x}{-P}=f(y)\ \Rightarrow\ \mu=e^{\int f(y)dy}$

**3.** حالت کلی: اگر P و Q چند جمله ای باشند $\mu$ را تابعی از $x^{\alpha}y^{\beta}$ گرفته و با اعمال شرط $P_y = Q_x$ ، که در آن $\frac{\partial P}{\partial y} = P_y$ و $\frac{\partial Q}{\partial x} = Q_x$ می باشد ، $\alpha$ و $\beta$ را با مساوی قرار دادن ضرائب جملات با توان های ثابت بدست می آوریم .

مثال 9) معادله $(3x^2 \csc x + e^y \cot x)dx + e^y dy = 0$ را حل کنید.

$$\begin{cases} P_y = e^y \cot x \\ Q_x = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{e^y \cot x - 0}{e^y} = \cot x = f(x)$$

$$\mu = e^{\int \cot x \, dx} = e^{\int \frac{\cos x}{\sin x} dx} = e^{\ln(\sin x)} = \sin x$$

با ضرب معادله در عامل انتگرال ساز داریم :

$$\overset{\times \mu}{\Rightarrow} (3x^2 + e^y \cos x)dx + (e^y \sin x)\, dy = 0$$

اکنون که معادله کامل شد همانند معادله کامل حل می نماییم :

$$u = \int Q\, dy + f$$

$$e^y \cos x + f'(x$$

پس در نهایت خواهیم داشت:

$$u = x^3 + e^y \sin x$$

مثال 10) معادله $(4xy^2 + 6y)dx + (5x^2y + 8x)dy = 0$ را حل کنید.

$$\begin{cases} P_y = 8xy + 6 \\ Q_x = 10xy + 8 \end{cases} \Rightarrow P_y \neq Q_x$$

معادله کامل نیست، اما در چند جمله ای متوجه می شویم که بدون در نظر گرفتن ضرائب ثابت اگر جای x و y در P عوض شوند چند جمله ای P شبیه Q می گردد بنابراین با ضرب معادله در $x^{\alpha}y^{\beta}$ می توان آنرا کامل نمود .

$$\left(4x^{\alpha+1}y^{\beta+2} + 6y^{\beta+1}x^{\alpha}\right)dx + \left(5x^{\alpha+2}y^{\beta+1} + 8x^{\alpha+1}y^{\beta}\right) dy = 0$$

با استفاده از شرط کامل بودن $P_y = Q_x$ داریم :

$$4(\beta+2)x^{\alpha+1}y^{\beta+1} + 6(\beta+1)y^{\beta}x^{\alpha} = 5(\alpha+2)x^{\alpha+1}y^{\beta+1} + 8(\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta}$$

$$\begin{cases} 4(\beta+2) = 5(\alpha+2) \\ 6(\beta+1) = 8(\alpha+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 3 \end{cases} \Rightarrow \mu = x^2y^3$$

یعنی با ضرب معادله در $x^2y^3$ ما معادله کامل خواهیم داشت :

در این صورت معادله به فرم مقابل تغییر می کند :

$$\Rightarrow\ (4x^3y^5 + 6x^2y^4)dx + (5x^4y^4 + 8x^3y^3)dy = 0$$

و برای حل آن می توان از روش اول استفاده کرد :

بنابراین $u = \int P\,dx + f(y)$ $\qquad$ $u = \int (4x^3y^5 + 6x^2y^4)\,dx + f(y)$

در نتیجه $\qquad$ $u = x^4y^5 + 2x^3y^4 + f(y)$

حال برای بدست آوردن F(y) از تابع u برحسب y مشتق گرفته و برای Q(x) قرار می دهیم

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 5x^4y^4 + 8x^3y^3 + f'(y) = Q = 5x^4y^4 + 8x^3y^3 \ \rightarrow\ f'(y) = 0\ \rightarrow\ F(y) = c$$

و این جواب معادله است

$$\Rightarrow\ u = x^4y^5 + 2x^3y^4 = c$$

## 4. معادله ریکاتی

این نوع معادله به فرم کلی $\frac{dy}{dx} + P(x)y + Q(x)y^2 = R(x)$ می باشد. تغییر متغیر u به طوری اعمال می شود که $y = \frac{du/dx}{uQ(x)}$ در نتیجه داریم :

$$u'' + \left(P - \frac{Q'}{Q}\right)u' - RQu = 0$$

معادله به معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی تبدیل می شود که در قسمت بعد روش حل آن ارائه می گردد.

## 5. معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول

هر معادله مرتبه اول را که به شکل $\frac{dy}{dx} + yP(x) = Q(x)$ باشد یعنی P و Q تابعی از (y) نباشد معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی گویند که در این معادله اگر Q(x)=0 باشد معادله همگن و در غیر این صورت معادله ناهمگن خواهد بود.

حل این نوع معادله به صورت $y = e^{-\int P(x)\,dx}\left[\int q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c\right]$ می باشد.

- اگر معادله به صورتی باشد که $\frac{dy}{dx}+xP(y)=q(y)$ و P و Q تابعی از (y) باشند و نیز x برحسب y مشتق گرفته شده باشد جواب این معادله به صورت $x=e^{-\int P(y)dy}\left[\int q(y)\,e^{\int P(y)dy}\,dy+c\right]$ خواهد بود.

مثال 11) معادله مقابل را حل کنید.

$$x^2\frac{dy}{dx}+2x^3y=5x^2$$

ابتدا بر $x^2$ تقسیم می کنیم :

$\frac{dy}{dx}+2xy=5$ , P(x)= $2x$ , Q(x)= 5

$\rightarrow y=e^{-\int 2x\,dx}\left[\int 5e^{\int 2x\,dx}dx+c\right]$

$\Rightarrow$ y =

$\Rightarrow\ y=\frac{5}{2x}+c\,e^{-x^2}$

مثال 12) معادله دیفرانسیل زیر، تغییرات غلظت در یک مخزن با شرایط اولیه زیر را نشان می دهد. زمان رسیدن غلظت به مقدار c=0.011 را بدست آورید.

$$10\frac{dc}{dt}+2c=0.02 \quad , \quad t=0 \quad , \quad c=0.02$$

معادله یک معادله مرتبه اول خطی می باشد که در آن

$$\frac{dc}{dt}+\frac{1}{5}c=0.02\ \rightarrow \begin{cases} P(x)=\frac{1}{5} \\ Q(x)=0.002 \end{cases}$$

بنابراین داریم :

$$c=e^{-\int\frac{1}{5}dt}\left[\int 0.002e^{\int\frac{1}{5}dt}\,dt+a\right]\Rightarrow\ c=e^{-\frac{1}{5}t}\left[0.01e^{\frac{1}{5}t}+a\right]$$

برای بدست آوردن مقدار ثابت $a$ از شرایط اولیه داده شده استفاده می نماییم .

t=0 , c=0.02 $\Rightarrow\ 0.02=0.01+a\ \Rightarrow\ a=0.01$

$$\Rightarrow\ c=0.01+0.01e^{-\frac{1}{5}t}\ \xRightarrow{\text{معادله را برحسب } t \text{ می نویسیم}} -\frac{1}{5}\ln\frac{c-0.01}{0.1}=t$$

$$\xrightarrow{\text{مقدار } c \text{ را قرار می دهیم}} -5\ln 0.1 = t \rightarrow t = 5\ln 10 \;\Rightarrow\; t = 11.51$$

### 6. معادله برنولی

شکل کلی معادله برنولی $\frac{dy}{dx} + yf(x) = y^n g(x)$ می باشد که برای حل این معادلات طرفین را بر $y^n$ تقسیم کرده و تغییر متغیر $u = y^{1-n}$ و $\frac{du}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$ را در معادله قرار می دهیم آنگاه به معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول بر حسب u و x تبدیل می شود.

مثال 13) معادله زیر را حل نمایید.

$$\frac{dy}{dx} + y = \frac{x}{y}$$

$$\begin{cases} f(x) = 1 \\ n = -1 \\ g(x) = x \end{cases} \xRightarrow{\text{تقسیم بر } y^n} y\frac{dy}{dx} + y^2 = x$$

$$u = y^2 \rightarrow \frac{du}{dx} = 2y\frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{du}{dx} + 2u = 2x$$ معادله خطی مرتبه اول

$$\rightarrow u = e^{-\int 2\,dx}\left[\int 2x\, e^{\int 2\,dx}\,dx\right] = e^{-2x}\left(\tfrac{1}{2}e^{2x}(2x-1) + c\right)$$

$$\xrightarrow{\text{جایگزین } u \text{ برحسب } y} y^2 = x - \tfrac{1}{2} + ce^{-2x}$$

برای حل این مسئله از انتگرال زیر استفاده شده است :

$$\int 2xe^{2x} \;\Rightarrow\; \begin{cases} 2x = u \rightarrow u' = 2 \\ e^{2x} = v' \rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases} \Rightarrow 2x.\tfrac{1}{2}e^{2x} - \int 2 * \tfrac{1}{2}e^{2x} = xe^{2x} - \tfrac{1}{2}e^{2x}$$

### حل معادلات دیفرانسیل مرتبه ی دوم

حل معادلات دیفرانسیل مرتبه ي دوم خطي :

صورت کلی معادلات مرتبه دوم خطی به صورت $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = G(x)$ می باشد که در این معادله در صورتیکه $G(x)=0$ باشد، معادله همگن است و اگر $G(x)\neq 0$ باشد معادله ناهمگن خواهد بود.

1. حل معادلات مرتبه ي دوم خطي با ضرايب ثابت :

چنانچه در فرم کلی معادلات مرتبه دوم $P(x)$، $Q(x)$ ، $R(x)$ اعداد ثابت باشند در این صورت معادله به صورت معادله مرتبه دوم خطی با ضرائب ثابت خواهد بود و فرم کلی معادله بصورت $ay'' + by' + cy = G(x)$ تبدیل می گردد.

در صورتیکه $G(x)\neq 0$ یا معادله ناهمگن باشد این معادلات دو نوع جواب خواهد داشت که جواب دوم بر اساس جوابهای معادله همگن و $G(x)$ بدست خواهد آمد و جواب خصوصی نام دارد و نتیجه به صورت $y = y_h + y_p$ می باشد که در آن :

$y_h$ : جواب همگن بر اساس $G(x)=0$

$y_p$ : جواب ناهمگن یا خصوصی با احتساب $G(x) \neq 0$

بنابراین برای حل این نوع معادلات ابتدا $G(x)=0$ را در معادله قرار می دهیم که در این صورت معادله به صورت زیر خواهد شد.

$$ay'' + by' + cy = 0$$

این معادله دارای یک معادله مشخصه به فرم زیر خواهد بود. $ar^2 + br + c = 0$

جوابهای این معادله مشخصه به صورت :

$$r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

خواهد بود که با توجه به $\Delta$ سه حالت ممکن است وجود داشته باشد که متناسب با آن سه جواب بدست می آید.

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \begin{cases} \Delta > 0 : & \mathrm{r} = \mathrm{r}_1 \text{ و } r = r_2 \rightarrow \mathrm{y_h} = \mathrm{A}e^{\mathrm{r_1 x}} + \mathrm{B}e^{\mathrm{r_2 x}} \\ \Delta = 0 : & \mathrm{r} = \mathrm{r}_1 = \mathrm{r}_2 \rightarrow \mathrm{y_h} = (\mathrm{A} + \mathrm{Bx})e^{\mathrm{rx}} \\ \Delta < 0 : \mathrm{r} = \alpha \pm \beta i \rightarrow & \mathrm{y_h} = e^{\alpha \mathrm{x}}(\mathrm{A}\sin\beta\mathrm{x} + \mathrm{B}\cos\beta\mathrm{x}) \end{cases}$$

مثال 14) معادله مقابل را حل نمایید.

$$y'' + 16y = 0$$

حل : ابتدا معادله مشخصه معادله بالا را می نویسیم : $\mathrm{r}^2 + 16 = 0$

که در آن $\Delta = b^2 - 4ac = 0 - 4(1)(16) = -64 < 0$

و جواب آن

$$\mathrm{r}^2 + 16 = 0 \rightarrow r = \pm 4i \begin{cases} \alpha = -\frac{b}{2a} = 0 \\ \beta = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 4 \end{cases}$$

.

بنابراین جواب معادله به صورت مقابل خواهد بود. $y_h = (A\sin 4x + B\cos 4x)$

مثال 15) معادله $y'' - 3y' + 2y = 0$ را حل نمایید.

ابتدا معادله مشخصه را می نویسیم :

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

که در آن

$$b^2 - 4ac = 9 - 8 = 1 \rightarrow \Delta > 0$$

بنابراین

$$r_1, r_2 = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2(1)} \begin{cases} r_1 = 2 \\ r_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow y_h = Ae^{2x} + Be^{x}$$

بدست آوردن جواب خصوصي در شرایط $G(x) \neq 0$ :

همانطور که قبلاً گفته شد جواب خصوصی $y_p$ بر اساس معادله مشخصه و $G(x)$ بر اساس جدول زیر بدست می آید.

| G(x) | $y_p$ | S |
|---|---|---|
| $\left(\mathbf{A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_nx^n}\right) = \mathbf{P_n(x)}$ | $x^s(B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx^n)$ | تعداد ریشه هاي برابر صفر معادله مشخصه |
| $\mathbf{e^{\alpha x}P_n(x)}$ | $x^s e^{\alpha x}(B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx^n)$ | تعداد ریشه هاي برابر $\alpha$ معادله مشخصه |
| $\mathbf{e^{\alpha x}P_n(x)\cos\beta x}$ یا $\mathbf{e^{\alpha x}P_n(x)\sin\beta x}$ | $\mathbf{x^s e^{\alpha x}\left(B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx^n\right)(C_1\sin\beta x + C_2\cos\beta x)}$ | تعداد ریشه های برابر $\alpha \pm \beta i$ معادله مشخصه |

برای بدست آوردن ضرائب $y_p$ از $y_p$ مشتق گرفته و در معادله اصلی قرار می دهیم و از برابری دو طرف رابطه ضرائب ثابت بدست می آید. ( جواب خصوصی هیچگاه به صورت پارامتری با ضرائب نامشخص نخواهد بود )

مثال 16) معادله $y'' + 16y = e^{3x}\sin x$ را حل کنید.

حل :بر اساس مثال 14 مقدار $y_h = (A\sin 4x + B\cos 4x)$ و ریشه های معادله مشخصه بصورت $0 \pm 4i$ می باشد.برای بدست آوردن جواب خصوصی از جدول کمک می گیریم. در این رابطه براساس $G(x)$ ، α=3 و β=1 یعنی $\alpha \pm \beta i$ برابر $3 \pm i$ بوده در حالیکه معادله مشخصه $0 \pm 4i$ می باشد پس S=0 می باشد.

$P_n(x) = 0\, , s =$

$P_n(x) = 1$ بوده و در نتیجه جواب به صورت زیر خواهد بود :

مشتق اول $y_p = e^{3x}(D_1 \sin x + D_2 \cos x)$

$y'_p = 3e^{3x}(D_1 \sin x + D_2 \cos x) + e^{3x}(D_1 \cos x - D_2 \cos x)$

$$y'_p = e^{3x}(\left(\underbrace{3D_1 - D_2}_{M}\right)\sin x + \left(\underbrace{3D_2 + D_1}_{N}\right)\cos x)$$

$y'_p = e^{3x}(Msir$

$y''_p = 3e^{3x}(Msi$

$y''_p = e^{3x}[(3M$

مشتق دوم $y''_p = 3e^{3x}[M \sin x + N \cos x] + e^{3x}[M \cos x - N \sin x]$

حال $y''_p, y'_p, y_p$ را در معادله اصلی قرار می دهیم :

$y''_p = e^{3x}[(3M - N)\sin x + (3N + M)\cos x] = e^{3x}(9D_1 - 3D_2 - 3D_2 - D_1)\sin x + (9D_2 + 3D_1) + (3D_1 - D_2)$

$$\therefore y''_p = 3e^{3x}[(8D_1 - 6D_2 + 16D_1)\sin x + (8D_2 + 6D_1 + 16D_2)\cos x] = \underbrace{e^{3x}\sin x}_{G(x)}$$

از برابری دو طرف تساوی داریم :

$$\Rightarrow \begin{cases} 24D_1 - 6D_2 = 1 \\ 24D_2 + 6D_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow D_1 = -4D_2 \Rightarrow \begin{cases} D_1 = \frac{4}{102} \\ D_2 = -\frac{1}{102} \end{cases}$$

بنابراین $\Rightarrow y = e^{3x}\left(\frac{4}{102}\sin x - \frac{1}{102}\cos x\right) + (A_0 \sin 4x + B_0 \cos 4x)$

## معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی با ضرائب متغیر

## حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی با استفاده از سری ها :

در این روش جواب کلی معادله دیفرانسیل خطی با ضرائب متغیر به صورت سری توانی است .یک سری توانی حول نقطه $x_0$ به صورت زیر تعریف می گردد :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0)^1 + a_2(x - x_0)^2 + \cdots$$

یادآوری 1) همگرایی سری: اگر حد ارائه شده برای سری وجود داشته باشد سری همگراست و در غیر این صورت واگراست:

$$S_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n (x - x_0)^n$$

در مهندسی شیمی رشته های همگرا اهمیت و کاربرد بیشتری دارند .

یادآوری 2 ) : جهت بررسی همگرایی سری از روش های مختلف زیر استفاده می شود .

1. آزمون مقایسه :

اگر به ازاء هر عدد صحیح N به طوریکه $n > N$ ، $|u_n| \le V_n$ ، $\sum v_n$ همگرا باشد آنگاه $\sum u_n$ مطلقاً همگرا خواهد بود.

اگر به ازاء هر عدد صحیح N به طوریکه $n > N$ ، $|U_n| \ge v_n$ ، $\sum v_n$ واگرا باشد آنگاه $\sum v_n$ نیز واگرا خواهد بود.

2. آزمون دالامبر

$$\lim \frac{u_n + 1}{u_n} = L \xrightarrow{\text{سه حالت داریم}} \begin{cases} L > 1 & \text{واگرا} \\ L < 1 & \text{همگرا} \\ L = 1 & \text{این آزمون جواب نمی دهد} \end{cases}$$

3. رشته های متناوب
$U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + \cdots$

اگر $U_n > 0$ باشد و اگر $n \to \infty$ آنگاه $U_n \to 0$ سری همگرا خواهد بود .

- رشته های توانی

$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots = \sum_0^\infty a_n z^n$

$$\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| = \frac{a_n z^n}{a_{n+1} z^{n+1}} = \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \frac{1}{|z|} \to$$

اگر $n \to \infty$ آنگاه $\frac{a_n}{a_{n+1}} \to R$

اگر $|Z| < R$ آنگاه سری همگرا

اگر $|Z| > R$ آنگاه سری واگرا

R را شعاع همگرایی می گویند .

4. رشته های دو جمله ای
$(1 + Z)^n = \sum \binom{p}{n} Z^n$

به ازاء $|Z| < 1$ دو جمله ای همگراست .

5. رشته های لگاریتمی

$$\ln(1+Z)=\sum_1^{\infty}\frac{(-1^n)^{-1}Z^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots$$

به ازاء $|Z|<1$ همگراست .

6. رشته های مثلثاتی

$$\sin Z=\sum_0^{\infty}\frac{(-1)^n\,Z^{2n+1}}{(2n+1)!}=Z-\frac{Z^3}{3!}+\frac{Z^5}{5!}-\cdots$$

$$\cos Z=\sum_0^{\infty}\frac{(-1)^n\,Z^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{Z^2}{2!}+\frac{Z^4}{4!}-\cdots$$

این دو ریشه به ازای کلیه مقادیر Z همگراست .

7. رشته هذلولی

$$\sinh Z=\sum_0^{\infty}\frac{Z^{2n+1}}{(2n+1)!}=Z+\frac{Z^3}{3!}+\frac{Z^5}{5!}+\cdots$$

$$\cosh Z=\sum_0^{\infty}\frac{Z^{2n}}{(2n)!}=1+\frac{Z^2}{2!}+\frac{Z^4}{4!}+\cdots$$

این دو ریشه همواره همگرایند .

یادآوری 3 : قضیه تیلور

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{1}{2}h^2f''(a)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

یادآوری 4 : قاعده هوپیتال

گاهی لازم می شود که کسر نامعینی به شکل $\frac{0}{0}$ حل کنیم حل این مشکل به صورت :

$$y=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{\acute{g}(a)}=\frac{f''(a)}{g''(a)}=\cdots$$

می باشد .

یادآوری 5 : مشتق سری توانی

$$f'(\mathrm{x})=\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\mathrm{x}a_{\mathrm{n}}(\mathrm{X}-\mathrm{X}_0)^{\mathrm{n}-1}$$

$$f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x(x-1)a_n(X-X_0)^{n-2}$$

یادآوری 6 : جمع و ضرب سری ها

$$\sum a_n(X-X_0)^n+\sum b_n(X-X_0)^n=\sum(a_n+b_n)(X-X_0)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(X-X_0)^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n(X-X_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n} a_n b_{n-k}(X-X_0)^n)$$

یادآوری 7 : سری تیلور

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(X-X_0)^n=a_0+a_1(X-X_0)+b_2(X-X_0)^2$$

$$f(x_0)=a_0 \quad \acute{f}(x_0)=a_1 \quad f''(x_0)=2a_2 \quad f^{(n)}(x_0)=n!\,a_n$$

$$a_n=\frac{1}{n!}f^n(x_0) \quad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(X-X_0)^n$$

روش فروبینیوس برای حل معادلات دیفرانسیل خطی با ضرائب متغیر :

برای حل معادلات به روش سری فرض می کنیم جواب معادله به صورت یک سری نظیر $y=\sum a_n x^{n+c}$ می باشد. از این جواب در دو مرحله مشتق گرفته و نتایج را در معادله اصلی قرار می دهیم .حال چون جواب معادله صفر است بنابراین کلیه ضرائب معادله در دو طرف صفر خواهد بود. بنابراین ضرائب توانهای مختلف $x$ را بدست آورده و مساوی صفر قرار می دهیم. به این روش $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$ براساس یکی از ضرائب نظیر $a_0$ بدست می آید به طوریکه بتوان آنرا به صورت یک سری نوشت .یعنی $a_n$ به صورت یک تابعی از $a_0$ نوشته می شود.

معادله دیفرانسیل $\boxed{1}$ $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+xF(x)\frac{dy}{dx}+G(x)y=0$ را در نظر بگیرید که در آن :

$$F(x)=F_0+F_1x+F_2x^2+\cdots$$

$$G(x)=G_0+G_1x+G_2x^2+\cdots$$

برای حل این معادله دیفرانسیل فرض کنید :

$$\boxed{y=\sum_0^{\infty} a_n x^{n+c}}$$

و

$$\frac{dy}{dx}=\sum_0^{\infty} a_n(n+c)x^{n+c-1}$$

و

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\sum_0^{\infty} a_n(n+c)(n+c-1)x^{n+c-2}$$

با جایگزینی این معادلات در $\boxed{1}$ نتیجه می گیریم :

$$x^2\sum a_n(n+c)(n+c-1)x^{n+c-2}+XF(x)\sum a_n(n+2)X^{n+c-1}+G(x)\sum a_nX^{n+c}=0$$

پایین ترین توان x که ظاهر می شود $x^c$ است و با صفر قرار دادن مجموع ضرائب $x^c$ نتیجه می گیریم :

$$\boxed{C^2+(F_0-1)C+G_0=0} \qquad \boxed{2}$$

به این معادله درجه دوم ، معادله اندیسی می گویند .حال باید ضرائب $a_2,a_1$ و… را نیز در چند جمله ای بدست آورد .

نکته : ضریب $a_1$ را با تعویض C با C+1 می توان بدست آورد .

بر اساس ریشه های معادله اندیسی حالت های متفاوتی وجود خواهد داشت :

حالت I ) ریشه های معادله اندیسی متفاوتند ولی تفاضلشان یک عدد صحیح نیست .

کلیه ضریب ها براساس $a_0$ و C بدست می آیند. به ازاء هر ریشه ما یک رشته داریم با جمع دو رشته جواب بدست می آید .

مثال 17) معادله $4x\frac{d^2y}{dx^2}+6\frac{dy}{dx}+y=0$ را با توجه به مطالب فوق حل کنید .

با قرار دادن $y=\sum_0^\infty a_nx^{n+c}$ و مشتقات آن در معادله و صفر قراردادن ضرائب جملات توانهای مختلف X داریم :

$$4x\sum_0^\infty a_n(n+c)(n+c-1)x^{n+c-2}+6\sum a_n(n+c)x^{n+c-1}+\sum a_nx^{n+c}=0$$

حال چند جمله ای را باز می نماییم یعنی به جای *n* برابر *0* ، *1* ، *2* قرار می دهیم :

$$4xa_0c(c-1)x^{c-2}+4xa_1(c+1)(c)x^{c-1}+4xa_2(c+2)(c+1)x^c+6a_0cx^{c-1}+6a_1(c+1)x^c$$
$$+6a_2(c+2)x^{c+1}+a_0x^c+a_1x^{c+1}+a_2x^{c+2}=0$$

حال چند جمله ای را مرتب نموده و ضرائب توانهای مختلف $x$ را برابر صفر قرار می دهیم .جملات را طوری بنویسید که توانهای برابر زیر هم قرار گیرند

$$\begin{aligned}
&4a_0c(c-1)x^{c-1}+4a_1c(c+1)x^c+4a_2(c+2)(c+1)x^{c+1}+\cdots\\
&+\quad 6a_0cx^{c-1}\quad +6a_1(c+1)x^c\ +\ 6a_2(c+2)x^{c+1}\\
&+\quad 0\quad +\quad a_0x^c\quad +\quad a_1x^{c+1}\quad =\quad 0
\end{aligned}$$

ضرایب $x^{c-1}$

$$\Rightarrow 4a_0c(c-1)+6a_0c=0$$

ضرایب
$x^{c}$

$$\boxed{I} \qquad 4a_1c(c+1)+6a_1(c+1)+a_0=0$$

ضرایب $x^{c+1}$ $\boxed{\mathrm{II}} \qquad 4a_2(c+2)(c+1)+6a_2(c+2)+$

$a_1=0$

کوچکترین توان مربوط به $x^{c-1}$ می باشد بنابراین معادله :

$$4a_0c(c-1)+6a_0c$$

معادله اندیس خواهد بود .که دارای دو ریشه $c=0$ و $c=-\frac{1}{2}$ می باشد .

هنگامیکه $c=0$ باشد داریم :

$$\boxed{I} \qquad 6a_1+a_0=0 \ \rightarrow \ a_1=\frac{-a_0}{6}$$

$$\boxed{II} \qquad 4a_2(2)(1)+6a_2(2)+a_1=0 \ \rightarrow \ a_2=\frac{-a_1}{20}$$

به همین ترتیب برای بدست آوردن رابطه ای که ضرائب مختلف $a_n$ را به هم مربوط می نماید کامنت در جمله II به جای عدد $1$ ، r قرار دهیم .به این صورت $r+1=2$ و $r-1=0$ می باشد، بنابراین از $II$ داریم :

$$4a_{r+1}(c+r+1)(c+r)+6a_{r+1}(c+r+1)+a_r=0$$

$$\rightarrow \ \frac{a_{r+1}}{a_r}=\frac{-1}{(2r+2)(2r+3)}$$

$$\frac{a_r}{a_{r-1}}=\frac{-1}{(2(r-1)+2)(2(r-1)+3)}=\frac{-1}{(2r)(2r+1)}$$

$$\frac{a_{r+1}}{a_{(r-1)}}=\frac{(-1)^2}{(2r+3)(2r+2)(2r+1)(2r)}$$

به این ترتیب

$$\boxed{\frac{a_r}{a_0}=\frac{(-1)^r}{(2r+1)!}}$$

و در نتیجه $a_n=\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$

و داریم $y = \sum \frac{(-1)}{(2n+1)!} a_0 x^n$

$$= a_0\left(1-\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{5!}-\frac{x^3}{7!}+\cdots\right) = a_0\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

به همین ترتیب با قرار دادن $c=-\frac{1}{2}$ داریم :

$$y_2 = a_0\left(\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)$$

لذا جواب عمومی $y=\frac{A\sin\sqrt{x}+B\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ خواهد بود .

حالت II) ریشه های معادله اندیسی با هم برابرند :

$$y = \alpha u(x,c_1) + \beta\left(\frac{\partial u}{\partial c}\right)_{c=c_1}$$

مثال 18) معادله مقابل را به روش سری ها حل نمایید

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(1-x)\frac{dy}{dx}-y=0$$

$y=\sum_0^\infty a_n x^{n+c}$

با قرار دادن y و مشتقات آنها در رابطه و صفر قرار دادن مجموع ضرائب $x^{c+1}, x^c, x^{c-1}$ نتیجه زیر بدست می آید :

$a_0 c(c-1) + a_0 c = 0$ معادله اندیسی

$a_1(c+1)^2 = a_0(c+1)$

$a_{r+1}(r+c+1)^2 = a_r(r+c+1)$

معادله اندیسی یک ریشه مضاعف دارد: C=0

$$a_{r+1} = \frac{a_r}{r+c+1} \quad \cdots\cdots \quad a_{r+1} = \frac{a_0}{(r+c+1)(r+c)\ldots(c+1)}$$

$$\rightarrow a_n = \frac{a_0}{(n+c)(n+c-1)\ldots(c+1)}$$

$$\Rightarrow y = \sum_0^\infty \frac{a_0 x^{n+c}}{(n+c)(n+c-1)\ldots(c+1)}$$

وقتی $C=0$ باشد:

$$y_1 = \mathrm{U}(\mathrm{x},0) = \mathrm{a}_0\left[1+\mathrm{x}+\frac{\mathrm{x}^2}{2!}+\frac{\mathrm{x}^3}{3!}+\cdots\right] = \mathrm{a}_0\mathrm{e}^{\mathrm{x}}$$

$$y_2 = \frac{\partial}{\partial c}\left[a_0\sum_0^\infty \frac{x^{n+c}}{(c+1)(c+2)+\cdots(c+n)}\right]_{c=0}$$

یادآوری 7 :

$$\mathrm{x}^{\mathrm{n+c}} = \mathrm{e}^{\mathrm{n+c_0}\ln x}$$

یادآوری 8 : اگر $y = f_1(c).f_2(c).f_3(c)\dots f_r(c)$ آنگاه $\ln y = \ln f_1(c)+\ln f_2(c)+\cdots$

با مشتق گیری از دو طرف و ضرب در y داریم :

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{f'_1(c)}{f_1(c)}+\frac{f'_2(c)}{f_2(c)}+\cdots+\frac{f'_r(c)}{f_r(c)}\right]$$

$$f_1(c)=\frac{1}{c+1} \quad , \quad f_n(c)=\frac{1}{c+n} \quad , \quad f_{n+1}(c)=e^{n+c}\ln x$$

$$\frac{f'_{(c)}}{f_1(c)} = \frac{-1}{c+1}\dots\frac{f'_{n+1}}{f_{n+1}} = \ln x$$

$$y_2 = \left[a_0\sum_0^\infty \frac{x^{n+c}}{(c+1)(c+2)\dots(c+n)}\left(\frac{-1}{c+1}-\frac{1}{c+2}-\cdots-\frac{1}{c+n}+\ln x\right)\right]_{c=0}$$

$$= a_0\textstyle\sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}\ln x - a_0\sum_1^\infty \frac{x^n}{n!}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

$$= a_0e^x\ln x - a_0\sum_1^\infty \frac{x^n}{n!}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

حالت III) اختلاف بین ریشه ها 2 عدد صحیح است ؛

$$y = A\,u(x,c_2)+B\frac{\partial}{\partial c}[(c-c_1)u(x,c)]_{c=c_1}$$

مثال 19) $x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2}+(2-5x)\frac{dy}{dx}-4y=0$

$$y=\sum_0^\infty a_nx^{n+c} \;,\; y'=\sum_0^\infty a_n(n+c)x^{n+c-1} \;,\; y''=\sum_0^\infty a_n(n+c)(n+c-1)x^{n+c-2}$$

$$\sum_0^\infty a_n(n+c)(n+c-1)x^{n+c}-\sum_0^\infty a_n(n+c)(n+c-1)x^{n+c-1}+2\sum_0^\infty a_n(n+c)x^{n+c-1}$$
$$-5\sum_0^\infty a_n(n+c)x^{n+c}-4\sum_0^\infty a_nx^{n+c}=0$$

$$\Rightarrow -a_0c(c-1)+2a_0c=0 \;\Rightarrow c=0 \quad , \quad c=-1$$

وقتی تفاضل ریشه های معادله اندیسی برابر عدد صحیح باشد ، مشکلات از اولین رابطه بازگشتی که در آن $a_y$ است ظاهر می شود. در اینجا تفاضل برابر 1 است و در $a_1$ ما دچار مشکل می شویم .

با قرار دادن ضرائب $x^{n+c}$ برابر صفر داریم :    $a_1(c+1)=a_0(c+2)$

$$a_1=\frac{c+2}{c+1}a_0$$

وقتی c برابر -1 باشد داریم :    $a_1=\infty$

بنابراین به ازای $c=-1$ رشته دارای ارزش نیست و به ازاء $c=0$ باید مسئله را دنبال کنیم و ...

$$a_{r+1}=\frac{r+c+2}{c+1}a_0 \text{ رابطه بازگشتی } \Rightarrow \boxed{u(x,c)=\sum\frac{x+c+1}{c+1}a_0x^{n+c}}$$

$C=0\Rightarrow a_{r+1}=(r+2)a_0$

$$y_1=\sum(n+1)a_0x^n=a_0(1+2x+3x^2+\cdots)=a_0(1-x)^{-2}$$

$$y_2=\frac{\partial}{\partial c}[(c+1)u(x,c)]_{c=-1}=\frac{\partial}{\partial c}\left[\sum_0^\infty(n+c+1)a_0x^{n+c}\right]_{c=-1}=y\left[\frac{\acute{f}_1(c)}{f_1(c)}+\cdots+\ln x\right]$$
$$=\sum(a_0(n+c+1)x^{n+c}\left[\frac{1}{c+1}+\frac{1}{c+2}+\cdots+\ln x\right]_{c=-1}$$
$$=(\sum a_0(n+c+1)x^{n+c}\left[\frac{1}{n+c+1}+\ln x\right])_{c=-1}$$
$$=(\sum a_0x^{n+c}[1+(n+c+1)\ln x])_{c=-1}=\sum a_0x^{n-1}[1+n\ln x]$$

یادآوری 9 : تابع گاما

$$\Gamma(x)=\int_{0}^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt$$

به ازاء $x>0$ همگراست .

$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} e^{-t}t^0\,dt=1$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\ ,\quad \Gamma(0)=\text{تعریف‌نشده}\ ,\quad \Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)\ ,\quad \Gamma(n)=(n-1)!$$

مثال 20 ) $\Gamma(\frac{5}{2})$ را محاسبه کنید .

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}*\frac{1}{2}*\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}*\frac{1}{2}*\sqrt{\pi}$$

فقط برای مطالعه :

روش حل معادلات از نوع بسل :

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0 \qquad x>0$$

با استفاده از روش فروبینیوس

"معادله مشخص" $r^2-\nu^2=0$

$$\Rightarrow r_2=-\nu \quad , \quad r_1=\nu$$

$$(r^2+2r+1-\nu^2)a_1=0 \Rightarrow (n+r+\nu)(n+r-\nu)a_n=-a_{n-2} \qquad n=2,3,4,\dots$$

$$(\nu^2+2\nu+1-\nu^2)a_0=0 \to (2\nu+1)a_0=0 \to a_0=0$$

حال برای ریشه $r_1=\nu$ داریم $a_1=0$

$$a_n=\frac{-1}{(n+r+\nu)(n+r-\nu)}a_{n-2}$$

در نتیجه $a_3=a_5=\dots=0$

با جایگذاری 2n به جای n برای ریشه های زوج داریم :

$$a_{2n}=\frac{-1}{4n(n+\nu)}a_{2n-2} \quad , \quad n=1,2,\dots$$

با قراردادن n-1 به جای n و ...

$$a_{2n}=\frac{(-1)^n}{4^n\,n!\,(1+\nu)(2+\nu)\dots(n+\nu)}a_0=\frac{\left(\frac{-1}{4}\right)^n a_0\Gamma(\nu+1)}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)}$$

با توجه به اختیاری بودن $a_0$ داریم
:

$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$

$$\xrightarrow{\text{درنتیجه داریم}} y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\ \Gamma(n+\nu+1) 4^n 2^\nu} x^{2n} x^\nu$$

تابع بسل نوع اول از مرتبه ν

$y_1 = J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)} (\frac{x}{2})^{2n+\nu}$

الف ) اگر ν عدد طبیعی یا صفر نباشد :

تابع بسل نوع اول از مرتبه (-ν)

$y_2 = J_{-\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n-\nu+1)} (\frac{x}{2})^{2n-\nu}$

$$y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x)$$

در صورتیکه ν عدد حسابی باشد آن را بطور معمول با n نمایش می دهند. در این شرایط $J_n$ و $J_{-n}$ استعلال خطی ندارند $\mathrm{J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)}$

ب ) اگر v=0 باشد : (تابع وبر)

$$\mathrm{Y_\nu(x) = \frac{2}{\pi}\left[\ln\frac{1}{2}x + y\right] J_\nu(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\nu-1} \frac{\nu-n-1}{n!} (\frac{1}{2}x)^{2n-\nu}}$$

$$\mathrm{-\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\frac{x}{2})^{2n-\nu}}{n!\,(n+\nu)!}\left[1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+\nu}\right]}$$

$y = 0.57721566$ ثابت اویلر

$\mathrm{y_2 = BY_0(x)}$

ج) اگر ν یک عدد صحیح باشد :

$$y_2 = BY_\nu(x)$$

بنابراین جواب معادله بسل را می توان بصورت زیر نوشت :

1. اگر ν یک عدد صحیح یا صفر نباشد
$y = AJ_\nu(x) + +J_{-\nu}(x)$
2. اگر ν یک عدد صحیح یا صفر باشد

$y = AJ_\nu(x) + BY_\nu(x)$

معادله دیفرانسیل تعدیل یافته بسل

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-(x^2-v^2)y=0$$

به جای x ما ix قرار می دهیم .

$$y=AJ_v(ix)+BJ_{-v}(ix) \qquad or \qquad y=AJ_v(ix)+BY_v(ix)$$

و پس از ساده سازی داریم :

$$\underbrace{y=C_1I_v(x)+C_2I_{-v}(x)}_{v\ \text{صفر یا صحیح نباشد}} \qquad or \qquad \underbrace{y=C_1I_v(x)+C_2K_v(x)}_{v\ \text{عدد طبیعی یا صفر}}$$

$$\boxed{I_v(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\frac{x}{2})^{v+2k}}{K!\,(n+k)!}}$$

$$K_v(x)=(-1)^{n+1}\left[\ln\left(\frac{x}{2}\right)+y\right]I_v(x)+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k-1)(\frac{x}{2})^{2k-n}+\frac{(-1)^n}{2}\sum\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!}\phi(k)+\phi(n+k)$$

ثابت اویلر $y=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{m}-\ln m\right)=0.5772$

$$\phi(p)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p} \qquad , \qquad \phi(0)=0$$

**حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی با ضرایب متغیر به روش بسل**

فرم کلی معادلات بسل از معروف ترین معادلات مرتبه دوم همگن می باشند که در شکل های مختلف بیان شده و در مراجع مختلف بخصوص کتاب های انتقال حرارت که اکثر فرایندهای آن منجر به این گونه معادلات می گردد مورد استفاده قرار گرفته است و ساده ترین آن به فرم کلی زیر می باشد :

$$\boxed{\mathbf{x^2y''+\alpha xy'+\left(m^2x^{\beta}+\eta\right)y=0}}$$

پاسخ این معادله به صورت $y_{(x)}=\sum_1^2 C_nx^{\frac{\lambda}{\mu}}.Z_v\left(|m|\mu x^{\frac{1}{\mu}}\right)$ می باشد که در آن

$$\lambda=\frac{1-\alpha}{\beta}$$

$$\mu=\frac{2}{\beta}$$

$$v=\mu\sqrt{(\frac{\lambda}{\mu})^2-\eta}$$

می باشد و مقدار z براساس v و m از جدول زیر بدست می آید :

| $m$ | $\nu$ | $Z_1$ | $Z_2$ |
|---|---|---|---|
| حقیقي | غیر صحیح | $J_\nu$ | $J_{-\nu}$ |
| | صحیح | $J_\nu$ | $I_\nu$ |
| مختلط | غیر صحیح | $Y_\nu$ | $Y_{-\nu}$ |
| | صحیح | $Y_\nu$ | $K_\nu$ |

بنابراین برای حل این نوع معادلات اولین گام بدست آوردن α ، β ، m و η می باشد سپس مقدار μ ، $\lambda$ و ν را بدست آورده و از جدول مقدار $Z_1$ و $Z_2$ را خوانده و به صورت $y = C_1Z_1 + C_2Z_2$ می نویسیم .

فلسفه معادلات بسل از حل معادلات مرتبه دوم به روش سری ها بدست آمد.(حل معادلات به روش سری) در اینجا اشاره مختصری به آن می کنیم.

توابع بسل دارای خواصی می باشد که به شرح زیر می باشد .

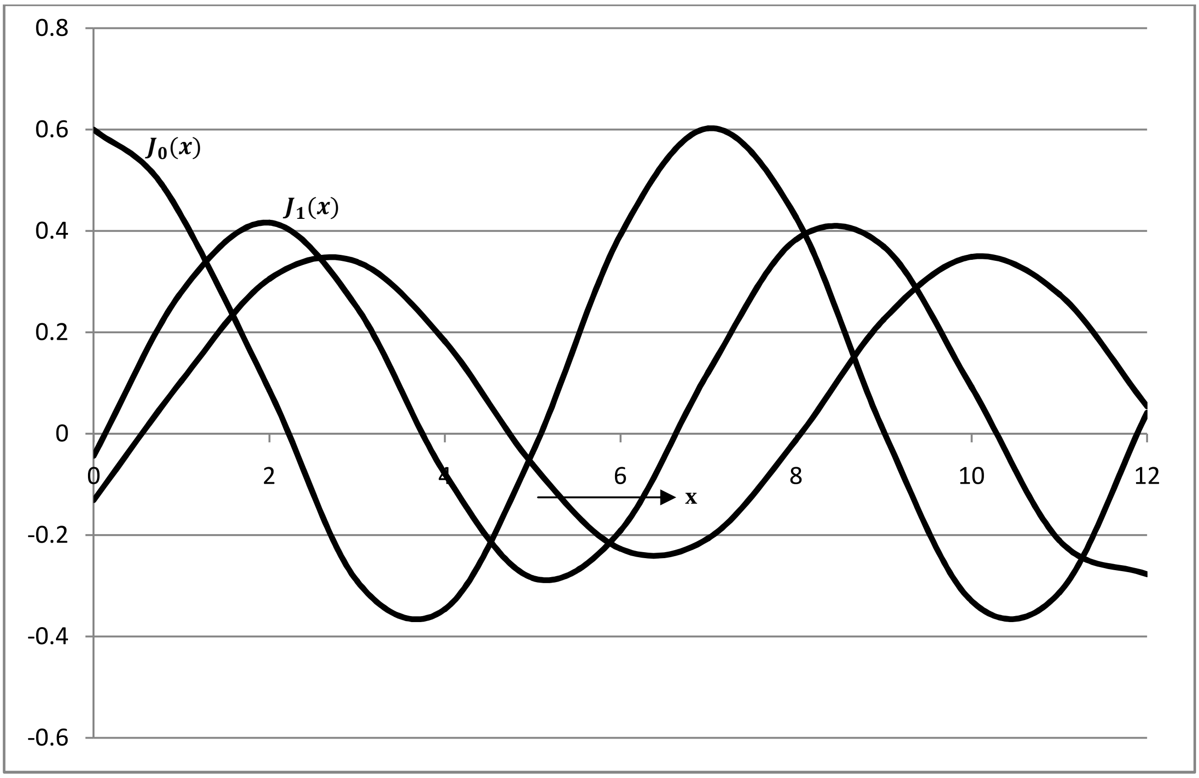
الف- ریشه های معادله بسل

توابع $j_n(x)$ و $y_n(x)$ ریشه های زیادی دارند که مقادیر عددی آنها در هند بوک های ریاضی موجود است.

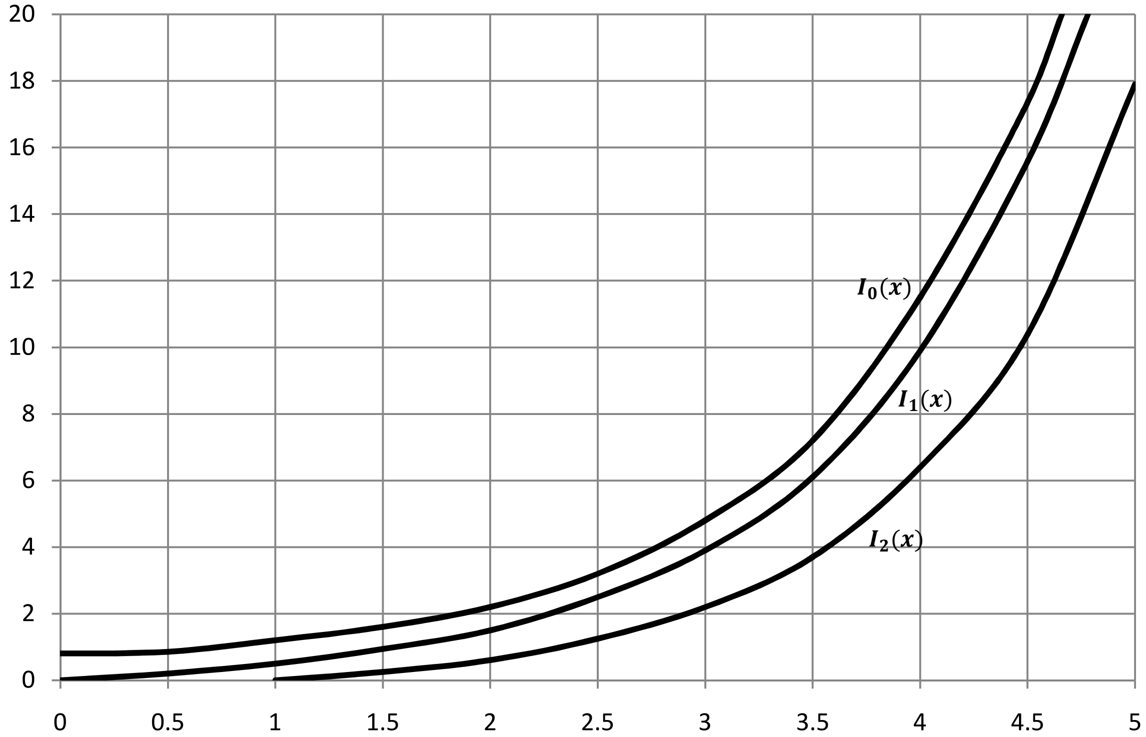
تعدادی از این ریشه ها در جدول پایین ارائه شده است.

**تعدادی از ریشه های $J_0(x)$ و $Y_0(x)$**

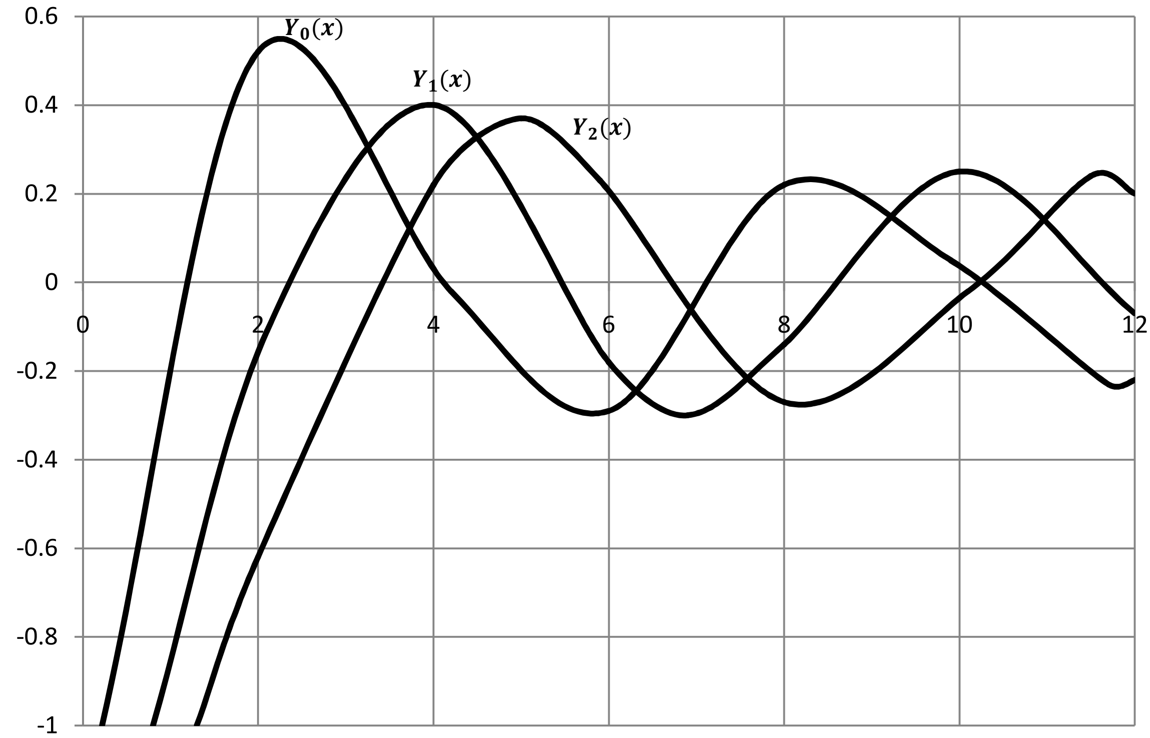
| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2.404 | 5.502 | 8.653 | 11.791 | 14.93 | 18.071 |
| | 0.893 | 3.957 | 7.086 | 10.222 | 13.361 | 16.500 |



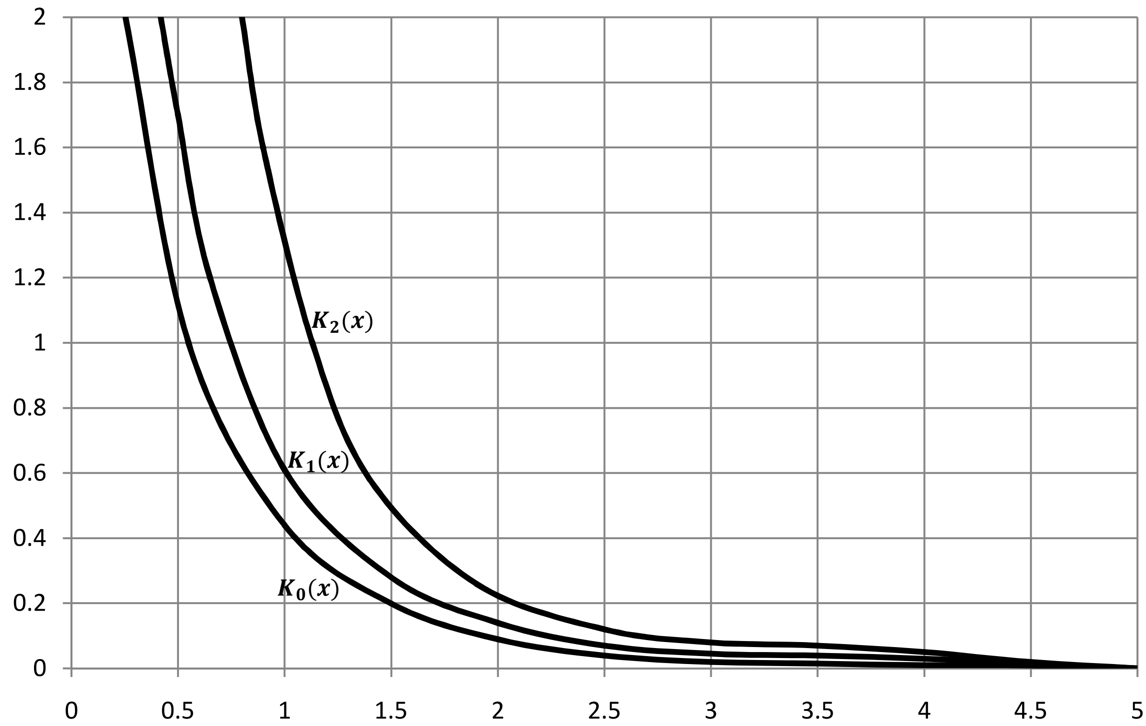

**J (x)  تابع**




تـابـع I (x)




تـابـع Y(x)




**تابع K (x)**

### ب- مقدار تابع بسل

برای x های بزرگ :

$$J_n(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\mathrm{co}$$

$$Y_n(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\mathrm{si}$$

$$I_n(x) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\,\mathrm{e}$$

$$K_n(x) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}$$

برای x های کوچک :

$$\mathrm{J_n(x)} \cong \frac{1}{2^n n!}x^n$$

$$Y_n(x) \cong \frac{-2^n(n}{\pi}$$

$$I_n(x) \cong \frac{1}{2^n n!} x^n$$

$$K_n(x) \cong 2^n(n -$$

پ - برخی از رابطه های جبری بین مرتبه های مختلف توابع بسل

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n$$

$$Y_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} Y$$

$$I_{n+1}(x) = -\frac{2n}{x}$$

$$K_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} K$$

ت - مشتق برخی از توابع بسل

$$\frac{d}{dx}[x^{\upsilon} Z_{\upsilon}(mx)]$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-\upsilon} Z_{\upsilon}(mx)$$

$$\frac{d}{dx}[Z_{\upsilon}(mx)] =$$

$$\frac{d}{dx}[Z_{\upsilon}(mx)] =$$

ث - برخی از رابطه های بین مشتق و مرتبه های مختلف توابع بسل

$$J'_n(x) = \frac{1}{2}[J_{n-1}$$

$$xJ'_n(x) = xJ_{n-1}$$

$$xJ'_n(x) = nJ_n($$

نکته :رابطه های بالا، برای تابع $Y_n(x)$ نیز صادق است .

$$I'_n(x) = \frac{1}{2}[I_{n-1}$$

$$xI'_n(x) = xI_{n-1}$$

$$xI'_n(x) = xI_{n+1}$$

$$K'_n(x) = -\frac{1}{2}[K$$

$nK'_n(x) = -xK$

$nK'_n(x) = nK_n$

ج - رابطه هایی برای انتگرال توابع بسل

$\int xJ_0(x)dx = x$

$\int J_1(x)dx = -J$

$\int x^n J_{n-1}(x)dx$

$\int x^{-n} J_{n+1}(x)dx$

$\int x^m J_n(x)dx =$

$\int xJ_n(\alpha x)J_n(\beta x$

$\int xJ_n{}^2(\alpha x)dx =$

مثال 21) معادله مقابل را حل نمایید.

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} - 4xy = 0$$

حل : با استفاده از استراتژی حل این نوع معادلات داریم :

$$\alpha = 2, \beta = 1, \lambda = \frac{1-\alpha}{\beta} = -1, \mu = 2, v = 2\sqrt{(-1/2)^2} = -1$$

با توجه به اینکه زیر رادیکال هم منفی و هم مثبت صحیح می باشد ، برای انتخاب جواب مناسب ،رادیکال را با توان 2 حذف می کنیم که جواب منفی باقی می ماند .

$$m^2 = -4 \Rightarrow m = \sqrt{-4} = \pm 2i$$

طبق نتایج m مختلط و v صحیح می باشد در نتیجه :

$$y_h = x^{-\frac{1}{2}}\left[C_1 Y_{-1}(4\sqrt{x}) + C_2 K_{-1}(4\sqrt{x})\right]$$

مثال 22) معادله $4x^2y'' + 2xy' + 4x^2y = 0$ را حل کنید.

حل :

برای حل ابتدا باید به شکل معادلات بسل در آوریم در نتیجه معادله بر 4 تقسیم می گردد. براساس استراتژی تدوین شده داریم :

$x^2y'' + {}^1/_2\, xy' + xy'' = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}\,, \beta = 2\,, \lambda = \frac{1-\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}\,, \mu = \frac{2}{2} = 1$ و $|m| = 1$

$v = \mu\sqrt{(\frac{\lambda}{\mu})^2 - \eta} = \lambda = \frac{1}{4}$

که در آن v غیر صحیح و m حقیقی می باشد پس در نتیجه جواب به صورت $y(x) = x^{\frac{1}{4}}\left[C_1 J_{\frac{1}{4}}(x) + C_2 J_{\frac{1}{4}}(x)\right]$ می باشد.

## حل معادلات مرتبه دوم خطی همگن با ضرایب متغیر به روش کوشي و اویلر

معادله به فرم $\boxed{\mathbf{x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0}}$ معادله کوشی و اویلر نام دارد که در این معادلات x در تابع y ضرب نشده است . برای حل ، ابتدا معادله مشخصه $r(r-1) + \alpha r + \beta = 0$ را تشکیل داده و مقدار r را بدست می آوریم.

$r(r-1) + \alpha r +$

$\Rightarrow r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0 \Rightarrow \Delta = (\alpha - 1)^2 - 4\beta \Rightarrow r = \frac{-(\alpha-1)\pm\sqrt{\Delta}}{2}$

و براساس مقدار r و Δ سه پاسخ متفاوت به شکل زیر بدست می آید :

$$\begin{cases} \Delta > 0 : r_1\,,\ r_2 \rightarrow y = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2} \\ \Delta = 0 : \mathrm{r} \rightarrow \mathrm{y} = \mathrm{x^r}(\mathrm{C_1} + \mathrm{C_2} \ln \mathrm{x}) \\ \Delta < 0 : r = v \pm \mu i \rightarrow \mathrm{y} = \mathrm{x^v}[\mathrm{C_1} \sin(\mu \ln \mathrm{x}) + \mathrm{C_2} \cos(\mu \ln \mathrm{x})] \end{cases}$$

مثال 23) معادله $x^2y'' + 3xy' + 5y = 0$ را حل کنید.

با توجه به نوع شکل معادله ، معادله از نوع کوشی اویلر می باشد که در آن $\alpha = 3$ و $\beta = 5$ می باشد در نتیجه معادله مشخصه آن :

$r^2 + (3-1)r + 5 = 0$

$$\Delta = (3-1)^2 - 4 * 5 = 4 - 20 = -16 < 0\,, r = \frac{-(3-1) \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$$

در نتیجه داریم :

$$\Delta < 0\,, \begin{cases} v = -1 \\ \mu = 2 \end{cases}$$

براساس مطالب گفته شده شکل سوم معادلات کوشی اویلر می باشد و جواب به صورت :

$$y = (C_1 \sin(2 \ln x) + C_2 \cos(2 \ln x))x^{-1}$$

مثال 24) معادله $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$ را همانند مثال قبل حل کنید.

$$r^2 + 4r + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = -2 \\ \Delta = 0 \end{cases} \Rightarrow y = (C_1 + C_2 \ln x)x^{-2}$$

**- معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی غیرهمگن با ضرائب متغیر :**

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = G(x)$$

برای حل اینگونه معادلات در ابتدا فرض می کنیم که G(x)=0 و جوابهای همگن ($y_n$) را بدست می آوریم. پس از تعیین جوابهای مستقل خطی $y_1$ و $y_2$ برای حالت همگن ، یک روش مناسب برای یافتن جواب خصوصی $y_p$ ، "روش تغییر پارامترها" می باشد که در این روش فرض می شود که $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$ باشد . برای یافتن توابع $u_1$ و $u_2$ ، مشتق مرتبه اول و دوم $y_p$ محاسبه شده و در معادله دیفرانسیل جایگذاری می شود .

$$y'_p = u'_1y_1 + u'_2y_2 + u_1y'_1 + u_2y'_2$$

با توجه به اینکه $u_1$ و $u_2$ توابع دلخواه می باشند، می توانیم فرض کنیم که $u'_1y_1 + u'_2y_2 = 0$ در نتیجه پس از ساده سازی داریم:

$$y'_p = u_1y'_1 + u_2y'_2$$

و حال مشتق دوم آن $y''_p = u_1y''_1 + u'_1y'_1 + u_2y''_2 + u'_2y'_2$ می گردد. با جایگذاری در معادله اصلی و مرتب کردن آن و با توجه به اینکه $y_1$ و $y_2$ جواب های معادله همگن $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ می باشند داریم :

$$u_1\underbrace{(y''_1 + P(x)y'_1 + Q(x)y_1)}_{=0} + u_2\underbrace{(y''_2 + P(x)y'_2 + Q(x)y_2)}_{=0} + u'_1y'_1 + u'_2y'_2 = G(x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u'_1y'_1 + u'_2y'_2 = G(x) & \text{نتیجه معادله بالا} \\ u'_1y_1 + u'_2y_2 = 0 & \text{فرض} \end{cases}$$

یک دستگاه دو معادله دو مجهول داریم که با حل آن خواهیم داشت :

$y_p = (-y_1)\int \frac{G(x)y_2\,dx}{\omega} + y_2\int \frac{G(x)y_1\,dx}{\omega}$ که در آن $\omega = y_1y'_2 - y_2y'_1$ می باشد .

شرط جواب رسیدن این معادله این است که $\omega = 0$ باشد .

فقط برای مطالعه

**راه دیگر حل معادلات مرتبه ی دوم ناهمگن $G(x) \neq 0$**

براي حل چنين معادلاتي فرض مي كنيم كه G( x) مساوي صفر است و جواب همگن آنرا به صورت $y_1, y_2$ بدست می آوریم و با داشتن $y_1, y_2$ جواب خصوصی به صورت $y_p = C_1 y_1 \int \frac{\omega_1}{\omega} G(x)dx + C_2 y_2 \int \frac{\omega_1}{\omega} G(x)dx$ بدست می آید که در آن

$$\omega = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}, \omega_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ 1 & y'_2 \end{vmatrix}, \omega_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & 1 \end{vmatrix}$$ رانسکین

و برای تعداد دفعات بیشتر چنین داریم :

$$\omega = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 & \cdots & y'_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^n & y_2^n & y_3^n & \cdots & y_n^n \end{vmatrix}, \omega_1 = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & y_n \\ 0 & \cdots & y'_n \\ 0 & \cdots & y''_n \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & y_n^n \end{vmatrix}$$

مثال 25 ) با توجه به روابط مطرح شده معادله رو به رو را حل کنید.

$$y'' + 4y' + 4y = x^3 e^{-2x}$$

مرحله اول : ابتدا فرض می کنیم G(x)=0 و معادله به صورت $y'' + 4y' + 4y = 0$ تبدیل می شود . این معادله یک معادله مرتبه دوم با ضرائب ثابت و معادله مشخصه $r^2 + 4r + 4 = 0$ می باشد.

مرحله دوم (بدست آوردن r) :

$$r = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = -2$$

مرحله سوم (محاسبه Δ) : چون Δ= 0 می باشد ما دارای دو جواب متفاوت $\begin{cases} y_1 = e^{-2x} \\ y_2 = xe^{-2x} \end{cases}$ می باشیم.

مرحله چهارم محاسبه رانسکین ( ω ) :

$$\omega = \begin{vmatrix} r_1 & \cdots & r_2 \\ r'_1 & \cdots & r'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-2x} & \cdots & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & \cdots & e^{-2x} - 2xe^{-2x} \end{vmatrix} = e^{-2x}(e^{-2x} - 2xe^{-2x}) - 2e^{-2x}(xe^{-2x}) =$$
$$e^{-4x} - 2xe^{-4x} + 2xe^{-4x} = e^{-4x} = \omega$$

$$\omega_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-2x} \\ 1 & e^{-2x} - 2xe^{-2x} \end{vmatrix} \Rightarrow \omega_1 = -xe^{-2x}$$

$$\omega_2 = \begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ -2e^{-2x} & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \omega_2 = e^{-2x}$$

مرحله پنجم محاسبه $y_p$ :

$$y_p = -C_1 e^{-2x} \int \frac{xe^{-2x}}{e^{-4x}} (x^3 e^{-2x})dx + C_2 xe^{-2x} \int \frac{e^{-2x}}{e^{-4x}} (x^3 e^{-2x})dx$$

$y_p = C_1 e^{-2x} \int (-x^4) dx + C_2 x e^{-2x} \int (x^3) dx$

$y_p = C_1 e^{-2x} \left( -\frac{x^5}{5} \right) + C_2 x e^{-2x} \left( \frac{x^5}{4} \right) \Rightarrow y_p = \frac{C e^{-2x} x^5}{20}$

$\Rightarrow y = A e^{-2x} + B x e^{-2x} + \frac{C e^{-2x} x^5}{20}$

- **معادله دیفرانسیل مرتبه دوم غیر خطی :** (حالت عمومی ندارد-چند حالت خاص بررسی می شود)

الف) اگر معادله دیفرانسیل فاقد y باشد .[ معادله ای می سازیم فاقد y باشد ]

مثال 26) معادله مقابل را حل کنید .

$\frac{d^2y}{dx^2} = x(\frac{dy}{dx})^3$

$\xrightarrow{\text{تغییر متغیر می دهیم}} p = \frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} \Rightarrow \frac{dp}{dx} = xp^3$

$\Rightarrow \frac{dp}{p^3} = x\,dx \Rightarrow -\frac{1}{2}p^{-2} = \frac{1}{2}x^2 + k_1 \rightarrow p^2 = \frac{1}{2k_1 - x^2}$

$p = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2k_1 - x^2}} \rightarrow dy = \frac{dx}{\sqrt{2k_1 - x^2}} \Rightarrow y = \pm \sin^{-1}(\frac{x}{2k_1}) + k_2$

ب) اگر معادله دیفرانسیل فاقد x باشد . (معادله ای می سازیم فاقد x باشد) $p = \frac{dy}{dx}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} . \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$

مثال 27) معادله مقابل را حل کنید .

$y\frac{d^2y}{dx^2} + 1 = (\frac{dy}{dx})^2$

$yp\frac{dp}{dy} + 1 = p^2 \Rightarrow \frac{p\,dp}{p^2 - 1} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \frac{1}{2}\ln(p^2 - 1) = \ln y + \underbrace{\ln a}_{k_1} = \ln(ya)$

$$\rightarrow \sqrt{p^2 - 1} = ay \Rightarrow p = \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{1 + a^2y^2} \Rightarrow x = \frac{1}{a}\text{arcsinh}(ay) + k_2 \rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{a}\sinh(k + ay) \\ y = \frac{1}{a}\sinh(k - ay) \end{cases}$$

<u>**حل معادلات دیفرانسیل پاره ای**</u>

مروری بر روش های تحلیلی حل معادلات دیفرانسیل

فرم کلی معادلات دیفرانسیل پاره ای به صورت $A\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+B\frac{\partial F}{\partial x.\partial y}+C\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+D\left(F,\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},x,y\right)=0$ می باشد که براساس میزان $\Delta$ ($\Delta = B^2-4AC$) به سه صورت نامگذاری می شود.

معادله بیضی گون (Elliptic)

If : $\Delta < 0 \rightarrow$

If : معادله سهمی گون (Parabolic)

$\Delta = 0 \rightarrow$

If : معادله هذلولی (Hyperbolic)

$\Delta > 0 \rightarrow$

- انواع شرایط مرزی

1. اگر شرط مرزی ، مقدار تابع به ازاء متغییر مستقل در یک مرز را بدهد ، شرط مرزی نوع اول یا شرط مرزی دریکه گویند.

$$at \quad t=0 \rightarrow T=f(x) \qquad , \qquad at \quad x=0 \rightarrow T=0$$

2. اگر شرط مرزی مقدار مشتق تابع را به ازاي متغيير مستقل در يك مرز را بدهد ، شرط مرزي نوع دوم يا شرط مرزي نيومن گويند.

$$at \quad r=0 \rightarrow \frac{dt}{dr}=0$$

3. اگر شرط مرزی در يك مرز رابطه ي بين مقدار تابع و مشتق تابع را بدهد ، شرط مرزي نوع سوم يا رابين گويند.

$$at \quad x=L \rightarrow h(T-T_\infty)=-K\frac{dT}{dx}$$

برای حل اینگونه معادلات باید با چندین مفهوم آشنا باشیم ؛

توابع متعامد :

توابع $\Phi_m(x),\Phi_n(x)$ را با تابع وزني $\omega(x)$ در فاصله $a$ , b متعامد گویند ، اگر

$$\int_b^a \omega(x)\Phi_n(x)\Phi_m(x)dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ k & m=n, k\neq 0\end{cases}$$

اگر k=1 باشد ، تابع را متعامد نرمال گویند.

مثال 28) ثابت کنید $\sin(mx),\sin(nx)$ در فاصله ي 0 تا $\pi$ با تابع وزني واحد ، متعامد است .

مروری بر روش های تحلیلی حل معادلات دیفرانسیل

نکته :

$$\begin{cases} 2\sin(nx)\sin(mx) = \cos(n-m)x - \cos(n+m)x \\ \sin^2(nx) = \frac{1-\cos 2nx}{2} \end{cases}$$

اثبات :

$$\int_0^\pi \sin(nx)\sin(mx) =$$

$$\frac{1}{2}\int[\cos(n-m)x - \cos(n+m)x]dx = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{n-m}\sin(n-m)x\Big]_0^\pi - \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{n-m}\sin(n-m)x\Big]_0^\pi = 0$$

شرایط بالا در صورتیکه $m \neq n$ باشد اثبات شده است، حال ببینیم در شرایطي که $n = m$ باشد چگونه خواهد شد .

$$\int_0^\pi \sin(nx)\sin(mx)dx = \int_0^\pi sin^2(nx)dx = \int_0^\pi \frac{(1-\cos 2nx)}{2}dx = \left[\frac{x}{2}\right]_0^\pi - \left[\frac{1}{4n}\sin 2nx\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

براي این که این تابع متعامد نرمال باشد ،تابع وزني چه مقدار خواهد شد

$$if \quad \omega(x) = \frac{2}{\pi} \rightarrow \frac{\sin(mx)}{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}$$

که با جایگزیني مي توانیم به تابع نرمال برسیم .

**معادلات اشتروم لیوویل :**

هر معادله به صورت $\frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{dy}{dx}\right] + [q(x) + \lambda\omega(x)]y = 0$ که در آن λ عدد ثابت می باشد و $p$ ، $q$ و □ توابعی از $x$ می باشند و به ازاء هر λ جوابی متناظر بدست می آید یک معادله اشتروم لیوویل می باشد اینگونه معادلات اگر دارای شرایط مرزی زیر باشند توابع متعامد خواهند بود:

1) At x $=a$ y=0
2) At x $=a$ $\frac{dy}{dx} = 0$
3) At x $=a$ $\frac{dy}{dx} = \beta y$

**حل معادلات دیفرانسیل پاره ای به روش جداسازی متغیرها**

برای حل معادلات دیفرانسیل پاره ای از یک مثال شروع می کنیم.

مثال 29) معادله دیفرانسیل پاره ای زیر را حل نمایید.

$$\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

مروری بر روش های تحلیلی حل معادلات دیفرانسیل

شروط

مرزی

$$\begin{cases} T(0,t) = 0 \\ \mathrm{T(L,t) = 0} \\ \mathrm{T(x,0) = T_i} \end{cases}$$

ابتدا بررسی می کنیم که T (متغیر مورد اندازه گیری ) به چه پارامترهایی بستگی دارد. $T = f(x,t)$

همانطور که از صورت مسئله مشهود است، T تابعی از $(t)$ و مکان $(x)$ می باشد. بنابراین می توانیم دما را حاصلضرب دو تابع مستقل $f(x)$ و $g(t)$ در نظر بگیریم .

$$T = f(x).g(t)$$

حال از این تابع مشتق گیری نموده و در معادله اصلی قرار می دهیم :

$$\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}^2} = \frac{\mathrm{d}^2 \mathrm{F}}{\mathrm{dx}^2}.\mathrm{g(t)}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = F(x).\frac{dg(t)}{dt}$$

$$\alpha \frac{d^2F}{dx^2}.g(t) = F(x)\frac{dg(t)}{dt}$$

و سپس جداسازی را طوری انجام می دهیم که کلیه متغیرهای $(x)$ وکلیه متغیرهای $(t)$ در دو طرف تساوی قرار گیرد :

$$\underbrace{\frac{1}{F(x)}\frac{d^2f(x)}{dx^2}}_{II} = \underbrace{\frac{1}{\alpha}\frac{1}{g(t)}\frac{dg(t)}{dt}}_{I} = \gamma$$

$I$ تابعي از t و II تابعي از $x$ است. این دو تابع برابرند و مي توان عددی مثل گاما$(\gamma)$ به آن اختصاص داد.

$\gamma$ مي تواند مثبت یا منفي و یا صفر باشد .

$$\gamma \begin{cases} \text{مثبت} & \lambda^2 \\ \text{منفی} & -\lambda^2 \end{cases}$$

که برای رسیدن به پاسخ صحیح باید علامت صحیح آن انتخاب شود. برای انتخاب علامت از شروط مرزی و شروط معادله اشتروم لیوویل استفاده می کنیم
.بنابراین ابتدا شروط مرزی را به شکل توابع g و F می نویسیم :

آنگاه $T(x,t) = f(x).\mathrm{g}(t) = 0$ $\quad T(0,t) = 0 \Rightarrow F(0)\mathrm{g}(t) = 0 \xrightarrow{\mathrm{g}(t)\neq 0} F(0) = 0$

زیرا اگر g(t)=0

باشد پس $T = g.F$ همیشه صفر است. $T(L,t) = 0 \Rightarrow F(L).\mathrm{g}(t) = 0 \rightarrow F(L) = 0$

$\mathrm{g}(t) = 0$ اگر $T(x,0) = T_i \Rightarrow \boxed{F(x).\mathrm{g}(0) = T_i}$

شروط مرزي در 3 حالت همگن می باشند. (براساس معادلات اشتروم لیوویل)

1. مقدار تابع در مرز برابر صفر باشد.
2. مشتق تابع در مرز برابر صفر باشد.
3. مشتق تابع در مرز برابر ضریبی از تابع در همان مرز باشد.

با توجه به شرط مرزی اشتروم لیوویل ، x شرط مرزی همگن است زیرا در هر دو مرز تعریف شده مقادیر آن همگن می باشد.

علامت $\gamma$ طوري انتخاب مي شود که پاسخ معادله با شرط مرزي همگن منجر به یك تابع متعامد گردد .

1) $if : \gamma > 0 \rightarrow \gamma = \lambda^2$

$$\boldsymbol{\frac{1}{F}\frac{d^2F}{dx^2} = \lambda^2 \rightarrow \frac{d^2F}{dx^2} - \lambda^2 F = 0}$$

$$\boldsymbol{r^2 = \lambda^2 \rightarrow r = \pm\lambda}$$

$$\boldsymbol{F = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x} = C\,sinh\,\lambda x + D\,cosh\,\lambda x}$$

مشاهده مي شود که معادله بدست آمده متعامد نمي باشد . پس نتیجه مي شود که $\gamma$ باید منفي باشد. راه دیگر بیان مسئله به این شکل است که :

$$F = C\sinh\lambda x + D\cosh\lambda x$$

شرط مرزی اول　$F = C\sinh(0) + D\cosh(0) = 0 + D = 0 \rightarrow D = 0$

شرط مرزی دوم　$F = C\sinh(\lambda L) = 0 \rightarrow \sinh(\lambda L) \neq 0 \rightarrow C = 0 \rightarrow \boxed{F = 0 \text{ (اشتباه است)}}$

پس $\boldsymbol{\gamma}$ نمی تواند شیب باشد .

2) *if* $\boldsymbol{\gamma}$=0

$$\boldsymbol{\frac{1}{F}\frac{d^2F}{dx^2} = 0}$$

$$\boldsymbol{F = Ax + B}$$

شرط مرزی اول　$F(0)=0 \rightarrow \boldsymbol{B = 0}$

مروری بر روش های تحلیلی حل معادلات دیفرانسیل

شرط مرزی دوم $F(L)=0 \rightarrow AL=0 \rightarrow A=0 \rightarrow \boxed{F=0\ (\text{اشتباه است})}$

در نتیجه در حالت سوم : $3)\ \text{If}\ :\ \gamma<0 \rightarrow \gamma=-\lambda^2$

$$\frac{1}{F}\frac{d^2F}{dx^2}=-\lambda^2 \rightarrow \frac{d^2F}{dx^2}=+\lambda^2F=0$$

$$r^2+\lambda^2=0 \rightarrow r=\pm\lambda i$$

$$F=\underbrace{A\sin(\lambda x)}_{I}+\underbrace{B\cos(\lambda x)}_{II}$$

I و $II$ متعامدند پس $F$ متعامد می باشد.

- نتیجه :معمولا علامت $\gamma$ مخالف علامت تابع همگن خواهد بود .

شرط مرزی اول $F(0)=0$

$$\rightarrow A\sin(0)+B\cos(0)=0 \Rightarrow 0+B=0 \rightarrow B=0$$

شرط مرزی دوم $F(L)=0 \rightarrow A\sin(\lambda L)=0$

$$\xrightarrow{A\neq 0}\sin(\lambda L)=0 \rightarrow \lambda L=n\pi \rightarrow \lambda=\frac{n\pi}{L}$$

وقتی مسئله n جواب دارد مجموع جوابها نیز جواب است یعنی :

$$\rightarrow \boxed{F=\sum A_n\sin(\frac{n\pi}{L}x)}$$

$$\frac{1}{\alpha}g(t)\frac{dg}{dt}=-\lambda^2 \rightarrow \frac{dg}{g}=-\lambda^2\alpha\,dt \rightarrow \ln g=-\lambda^2\alpha\,t+\ln c \rightarrow g(t)=ce^{-\lambda^2\,\alpha t} \rightarrow T=g(t).F(x)$$
$$=\sum k_n\sin(\frac{n\pi}{L}x)e^{-\lambda^2\,\alpha t}$$

که $k_n$ در آن عدد ثابت جدید و حاصلضرب $c.A_n$ می باشد. برای بدست آوردن $k_n$ از شرط مرزی سوم استفاده می کنیم :

$$T(x,0)=T_i \rightarrow T_i=\sum k_n\sin(\frac{n\pi}{L}x)e^{-\lambda^2\alpha(0)}=\sum k_n\sin(\frac{n\pi}{L}x)$$

حال برای حذف Σ می توانیم از سری فوریه و یا قوانین توابع متعامد استفاده کنیم که $\sin(x)$ یک تابع متعامد است. بنابراین طرفین را در $\sin(\frac{n\pi}{L}x)$ ضرب نموده و از آنها در فاصله 0 تا L انتگرال گیری می کنیم. با توجه به توابع متعامد تمام عبارتهای داخل Σ حذف می شود به جز جمله $n$ام یعنی داریم :

$$\int_0^L T_i\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx=\int_0^L k_n\sin^2\frac{n\pi}{L}(x)dx$$

**فرمولاسیون و مدلسازی مسائل در مهندسی شیمی**

منظور از مدلسازی ریاضی یافتن معادله یا معادلاتی است که بیانگر تاثیر متعبرهای مختلف و نحوه تاثیر آنها بر خروجی مسئله (پارامتر مطلوب) می باشد. مراحل مختلف فرمولاسیون مسئله به شرح زیر است:

مروری بر روش های تحلیلی حل معادلات دیفرانسیل

1. شناخت دقیق فیزیک مسئله و کلیه شرایط فیزیکی حاکم بر آن
2. تعیین متغیرهای مستقل و غیر مستقل سیستم
3. تعیین خصوصیات فیزیکی و شیمیایی نحوه تغییرات آنها
4. انتخاب سیستم و حجم کنترل (المان)
5. انتخاب قوانین کلی حاکم بر مسئله براساس فیزیک مسئله و پارامتر مطلوب
6. قراردادن روابط خاص
7. فرضیات ساده کننده منطبق بر فیزیک مسئله
8. تعیین شرایط اولیه و شرایط مرزی مناسب
9. انتخاب تکنیک مناسب برای حل معادلات
10. تجزیه و تحلیل جوابها

بنابراین برای انجام یک مدلسازی مناسب باید ابتدا با استفاده از فیزیک مسئله و قوانین حاکم به یک معادله دیفرانسیل با شرایط مرزی مناسب رسیده و سپس با استفاده از تکنیک های موجود این معادله دیفرانسیل را حل نمود . شرح مراحل مختلف فرمولاسیون مسئله عبارتند از :

1. شناخت دقیق فیزیک مسئله :

برای شناخت فیزیک مسئله لازم است شکل مسئله بدقت رسم گردد و مقادیر معلوم بر روی آن مشخص شود .

2. قضیه متغیرهای مستقل و غیرمستقل :

پس از رسم شکل ، متغیرها بر روی آن تعیین می گردد . متغیرها عبارتند از پارامترهایی که تغییر می کنند و پارامترهایی که پارامترهای اصلی براساس آن تغییر می کند مثلاً تغییر دما در طول یک میله به صورت $T = f(x)$ و تغییر دما در طول شعاع و طول لوله به صورت $T = f(x,r)$ بیان می گردد.

3. خصوصیات شیمیایی و فیزیکی :

کلیه متغیرهای وابسته با فیزیک مسئله مشخص شده و نحوه تغییرات آنها نیز تعیین می گردد این خصوصیات شامل ضریب هدایت حرارتی $(K)$ ، ضریب انتقال حرارت جابجایی (h) ، دانسیته $\rho$ ، ویسکوزیته $\mu$ و ... مربوط به جسم مورد مطالعه می باشد که بسته به نوع مسئله تعیین می گردند.

4. انتخاب نوع سیستم و حجم کنترل :

سیستم مورد مطالعه می تواند به دو صورت انباشته (lumped) و دیفرانسیلی ( توزیع یافته ) باشد. در فرمولاسیون انباشته متغیر فقط تابعی از زمان است ولی در مدل دیفرانسیلی یا توزیع یافته ، متغیر هم تابع زمان است و هم تابع مکان. فرمولاسیون انباشته برای سیستم ها و مسائلی قابل استفاده است که کمیت مورد مطالعه فقط با زمان تغییر می کند و برحسب مختصات مکانی تغییراتی وجود نداشته باشد و اگر داشته باشد قابل چشم پوشی باشد. نظیر تغییرات حجمی یک تانک آب در حال تخلیه و یا تغییرات دمایی یک کره بسیار کوچک و گرم که داخل استخری از آب می افتد. در این سیستم ها حتماً مسئله انباشتگی مد نظر می باشد.

در صورتیکه تغییرات یک کمیت برحسب مختصات مکانی در یک سیستم متغییر باشد فرمولاسیون دیفرانسیلی است ، در این حالت یک جزء دیفرانسیلی بسیار کوچک از جسم به عنوان حجم کنترل یا المان در نظر گرفته می شود و سیستم بر روی آن مورد مطالعه قرار می گیرد و جزء دیفرانسیلی در نظر گرفته شده باید از نظر هندسی و نحوه تغییرات با مسئله هماهنگ باشد. انتخاب مناسب این سیستم نیاز به تمرین و مهارت کافی دارد. تغییرات سرعت سیال روی سطح شیبدار و تغییرات دمایی در یک کره بزرگ داغ در داخل استخر مثالهایی از این مسئله است.

5. انتخاب قوانین حاکم بر مسئله :

بعد از انتخاب سیستم بنا به مسئله مورد نظر یکی از قوانین بقاء را می نویسیم . این قوانین عبارتند از قانون بقاء جرم، قانون بقاء انرژی یا اصل اول ترمودینامیک، قانون بقاء آنتروپی یا اصل دوم ترمودینامیک و موازنه ممنتوم یا اصل دوم نیوتن.

قانون بقاء جرم :

$$\Delta W_i - \mathrm{R}_i = \frac{\mathrm{dM}_i}{\mathrm{dt}}$$

اصل اول ترمودینامیک یا بقاء انرژی :

$$\Delta E = \Delta Q - \Delta W$$

اصل دوم ترمودینامیک یا بقاء آنتروپی :

$$\Delta(SW) + \frac{q}{T} + Sg = \frac{ds}{dt}$$

اصل دوم نیوتن یا موازنه ممنتوم :

$$f = \frac{1}{g}\frac{d(mu)}{dt}$$

براساس فیزیک مسئله هر کدام از این پارامترها عبارت های خاصی به خود می گیرند مثلاً q ممکن است بر اثر جابجایی باشد $q = hA\Delta T$ یا بر اثر هدایت $q = kA\frac{dT}{dx}$ که بسته به فیزیک مسئله قوانین مربوط در معادلات قرار خواهد گرفت.

6. قوانین خاص :

این قوانین عبارتند از :

| | |
|---|---|
| قانون گاز کامل در سیالات | $PV = RT$ |
| قانون هوک در فنرها | $f = -kx$ |
| قانون فوریه در هدایت حرارتی | $\frac{q}{\mathrm{A}} = -\mathrm{k}\Delta\mathrm{T}$ |
| قانون نیوتون جابجایی گرمایی | $\frac{q}{\mathrm{A}} = \mathrm{h}\Delta\mathrm{T}$ |
| قانون اهم در الکتریسیته | $V = R.i$ |

| | |
|---|---|
| قانون استفان بولتزمن در تشعشع حرارتی | $\frac{q}{A} = \delta T^4$ |
| قانون سیالات نیوتونی | $\tau = -\mu \Delta x$ |
| قانون فیک در انتقال جرم | $J = -D\Delta C$ |

بعد از جاگذاری این عبارتها ، قدم بعدی ساده نمودن معادله و تبدیل آن به شکل یک معادله دیفرانسیل معمولی یا پاره ای می باشد و در نهایت انتخاب فرضیه ها و شرایط اولیه و شرایط مرزی برای حل معادله و انتخاب یک روش مناسب با استفاده از آنچه تاکنون گفته شده است.

7. فرضیات ساده کننده :

فرضیاتی هستند که گرچه بسیار واقعی نمی باشند ولی با اندک خطای ناچیز باعث سادگی حل مسئله می گردند. مثلاً ثابت بودن $k$، ثابت بودن ρ و ... که بر فیزیک مسئله استوار است.

8. تعیین شرایط اولیه و مرزی :

شرایط اولیه براساس زمان و شرایط مرزی براساس مکان تعیین می گردند، در تعیین این شرایط در نظر گرفتن تقارن مسئله ، قراردادن مبدأ مختصات در مکان مناسب بسیار حائز اهمیت است و در حل مسئله کمک فراوانی می نماید. این انتخابها براساس تجربه و از روی مهارت بدست خواهد آمد.

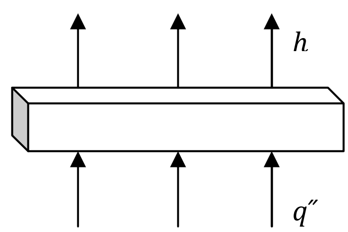
9. انتخاب تکنیک مناسب برای حل :

تکنیک مناسب حل براساس آنچه تاکنون در خصوص معادلات دیفرانسیل مطالعه کردیم چه به صورت عددی و چه به صورت تحلیلی انتخاب می گردد.

10. بدست آوردن جواب درست :

حتماً جواب در شرایط مرزی باید صدق کند وگرنه جواب اشتباه است .

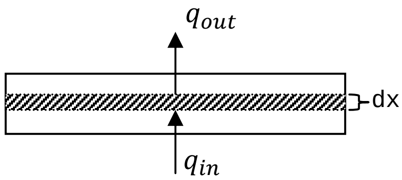
مثال 1) یک صفحه گرم با ضخامت L در حالت اولیه فرض می شود که در دمای $T_\infty$ قرار دارد ، کف این صفحه در معرض یک تشعشع $q''$ قرار می گیرد، در بالای صفحه ضریب انتقال حرارت h است. ضخامت صفحه در برابر سایر ابعاد کوچک است ، به طوریکه انتقال حرارت در یک بعد می باشد و از دو طرف نیز انتقال حرارت نداریم، توزیع دما را در دو حالت توزیع یافته و lumped بدست آورید.




تجمع + مصرف + خروجی =

حل معادله برای سیستم توزیع یافته :

با توجه به اینکه تغییرات در جهت ضخامت داریم ، یک المان بر روی ضخامت می بندیم :




$$q_{in} - q_{out} = \frac{dq}{dt}$$

$$-kA\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x} + kA\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x+dx} = \frac{d(mcT\Delta x)}{dt}$$

با فرض ثابت بودن m و c و $\Delta x$ :

$$-kA\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x} + kA\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x+dx} = mc\Delta x\frac{dT}{dt}$$

به $\Delta x$ تقسیم می کنیم فرمول مشتق بدست می آید :

$$\frac{d}{dx}\left(-kA\frac{dT}{dx}\right) = mc\frac{dT}{dt}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{-mc}{kA}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \\ x = L \end{cases}$$

برای حذف ناهمگنی در شرایط مرزی از تغییر متغیر استفاده می کنیم: $T - T_\infty = \theta \rightarrow \frac{dT}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\ ,\ \frac{dT}{dx} = \frac{d\theta}{dx}$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

$$\rightarrow \begin{cases} & x = 0 & \frac{d\theta}{dx} = \frac{-q''}{k} \\ & x = L & \frac{d\theta}{dx} = \frac{-h}{k}\theta \\ t = 0 & \theta = \theta_0 & \end{cases}$$

دله با تکنیکهای حل معادله دیفرانسیل پاره ای قابل حل می باشد.

حل معادله برای سیستم لامپ :

$$q''A + 0 = hA(T - T_\infty) + 0 + \rho\, c\, v\, \frac{dT}{dt}$$

$$q''A = hA(T - T_\infty) + \rho\, cAL\, \frac{dT}{dt}$$

همگن نمودن معادله

$$T - T_\infty = \theta \ \rightarrow\ \frac{dT}{dt} = \frac{d\theta}{dt}$$

مروری بر روش های تحلیلی حل معادلات دیفرانسیل

$$q'' = h\theta + \rho c L\frac{d\theta}{dt} \rightarrow \boxed{\frac{d\theta}{dt} + \frac{h}{\rho c L}\theta = \frac{q''}{\rho c L}}$$

چون معادله مرتبه اول است نیاز به یک شرط اولیه یا مرزی داریم :

$at \rightarrow\ t = 0\ \rightarrow\ \theta = 0$ شرط اولیه

معادله مرتبه اول خطی

$$\frac{d\theta}{dt} + m\theta = k\ \rightarrow\ \theta = e^{-\int m\,dt}\left[\int k e^{\int m dt} dt + c_1\right]$$

$$\theta = e^{-mt}\left[\frac{k}{m}e^{mt} + c_1\right] \rightarrow \boxed{\theta = \frac{k}{m} + c_1 e^{-mt}}$$

بدست آوردن ثابت

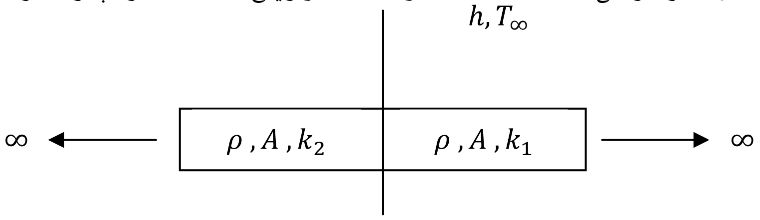
$$at\ \ t = 0\ \rightarrow\ 0 = \frac{k}{m} + c_1 e^0$$

$$\Rightarrow\ c_1 = -\frac{k}{m}$$

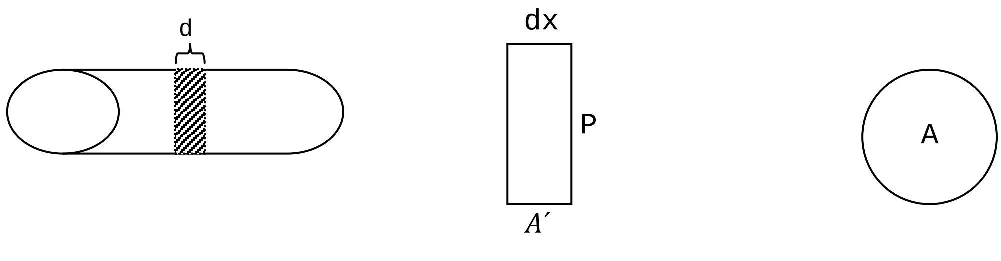
$$\theta = \frac{k}{m}(1 - e^{-mt}) \rightarrow \frac{k}{m} = \frac{q''/\rho cl}{h/\rho cl} = \frac{q''}{h}$$

$$\boxed{\theta = \frac{q''}{h}\left(1 - e^{-\frac{h}{\rho cl}t}\right)} \Rightarrow\ T = T_\infty + \frac{q''}{h}\left(1 - e^{-\frac{h}{\rho cl}t}\right)$$

مثال 2) در نظر بگیرید یک پره نامحدود که از دو پره محدود تشکیل شده است ، در x=0 فلاکس حرارتی آ``` شود ، توزیع دما در پره را بدست آورید .




X=0




$A'$: سطح انتقال حرارت جابجایی و

A: سطح انتقال حرارت هدایتی

مبدأ مختصات را در محل اتصال دو پره در نظر می گیریم .

تجمع + مصرفی + خروجی = تولید + ورودی

ابتدا معادلات را برای پره نامحدود سمت راست می نویسیم :

$$q_x + 0 = [q_{x+dx} + hA'(T - T_\infty)] + 0 + 0$$

$$-k_1 A\left.\frac{dT}{dx}\right|_x = -k_1 A\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x+dx} + hA'(T - T_\infty)$$

$k_1A\frac{dT}{dx}\Big|_{x+dx} - k_1A\frac{dT}{dx}\Big|_{x} = hp\,dx(T-T_\infty)$ و $A' = \mathrm{pdx}$

طریفین را بر dx تقسیم و با استفاده از تعریف مشتق $\left(\frac{y|_x - y|_{x+dx}}{dx}\right) = \frac{dy}{dx}$ داریم :

$$\frac{d}{\mathrm{dx}}\left(\mathrm{k_1A}\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dx}}\right) = \mathrm{hp(T-T_\infty)} \xRightarrow{\text{چون } k \text{ و } A \text{ تابع } x \text{ نمی باشند}} k_1A\frac{d^2T}{dx^2} = hp(T-T_\infty)$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم طرفین بر } k_1A} \frac{d^2T}{dx^2} = \frac{hp}{k_1A}(T-T_\infty)$$

همگن سازی معادله :

$$T-T_\infty = \theta \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dx^2} - m_1^2\theta = 0 \xrightarrow{\text{معادله مشخصه}} r^2 - m_1^2 = 0 \rightarrow r = \pm m_1\,, m = \sqrt{\frac{hp}{k_1A}}$$

در نتیجه با استفاده از روش حل معادلات مرتبه دوم با ضرائب ثابت :

$$\boxed{\theta = c_1e^{-m_1x} + c_2e^{m_2x}}$$

به همین ترتیب برای طرف سمت چپ داریم :

$$\frac{d^2\theta'}{\mathrm{dx}^2} - \mathrm{m}_2^2 = 0 \rightarrow \theta = \acute{\mathrm{T}} - \mathrm{T}_\infty$$

$$m_2 = \sqrt{\frac{hp}{k_2A}} \rightarrow \boxed{\acute{\theta} = D_1e^{-m_2x} + D_2e^{m_2x}}$$

حال شروط مرزی را بررسی می کنیم :

$\boxed{1}$ $at\ \ x = \infty \quad \rightarrow\ T = T_\infty \ \rightarrow\ \theta = 0$

$\boxed{2}$ $at\ \ x = -\infty \ \rightarrow\ T' = T_\infty \ \rightarrow\ \theta' = 0$

اتصال دو مرز

$\boxed{3}$ $at\ \ x = 0 \ \rightarrow\ T = T' \ \rightarrow\ \theta = \theta'$

$\boxed{4}$ $at\ \ x = 0 \ \rightarrow\ q''A = -k_1A\frac{dT}{dx} + k_2A\frac{dT'}{dx}$

1) $\theta(\infty) = c_1e^{-m_1\infty} + c_2e^{m_2\infty} = 0$

$e^\infty \neq 0 \ \Rightarrow\ c_2 = 0$
$\theta(x) = c_1e^{-m_1x}$

2) $\theta'(-\infty) = D_1e^{-m_2(-\infty)} + D_2e^{m_2(-\infty)} \ \Rightarrow\ D_1e^\infty + D_2\times 0 = 0$

$e^\infty \neq 0 \rightarrow D_1 = 0$
$\theta'(x) = D_2e^{m_2x}$

3) $\theta(0) = \theta'(0)$

$c_1e^{-0} = D_2e^0 \ \rightarrow\ c_1 = D_2 = B$

4) $q'' = -k_1\frac{d\theta}{dx} + k_2\frac{d\acute{\theta}}{dx}$
$\frac{d\theta}{dx} = (-Bm_1)e^{-m_1x}$
$\frac{d\acute{\theta}}{dx} = (Bm_2)e^{m_2x}$

$$at \qquad x=0 \quad q'' = (k_1 B m_1)e^{-m_1(0)} + (k_2 B m_2)e^{m_2(0)}$$

$$q'' = B(k_1 m_1 + k_2 m_2) \ \rightarrow \ B = \frac{q''}{k_1 m_1 + k_2 m_2}$$

$$B = \frac{q''}{k_1\sqrt{\frac{hP}{k_1 A}} + k_2\sqrt{\frac{hP}{k_2 A}}} = \frac{q''}{\sqrt{\frac{k_1 hP}{A}} + \sqrt{\frac{k_2 hP}{A}}}$$

$$B = \frac{q''\sqrt{\frac{A}{hP}}}{\sqrt{k_1}+\sqrt{k_2}}$$

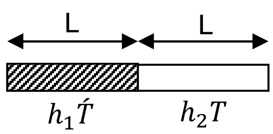
$$\left\{\begin{aligned} &\theta(x) = T_x - T_\infty \\ &= \frac{q''\sqrt{\frac{A}{hP}}}{\sqrt{k_1}+\sqrt{k_2}} e^{-\sqrt{\frac{hP}{k_1 A}}x} \end{aligned}\right\}$$

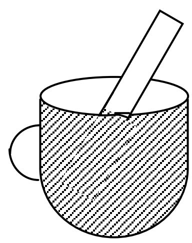
$$\left\{\begin{aligned} &\theta(x) = \acute{T}'_x - T_\infty \\ &= \frac{q''\sqrt{\frac{A}{hP}}}{\sqrt{k_1}+\sqrt{k_2}} e^{-\sqrt{\frac{hP}{k_1 A}}x} \end{aligned}\right\}$$

بررسی صحت جواب معادله با قراردادن یکی از شروط مرزی در جواب :
$\theta(0) = \theta'(0)$

$$\frac{q''\sqrt{\frac{A}{hP}}}{\sqrt{k_1}+\sqrt{k_2}} = \frac{q''\sqrt{\frac{A}{hP}}}{\sqrt{k_1}+\sqrt{k_2}}$$

مثال 3 : توزیع دما را در سیستم زیر بدست آورید .



در این سیستم یک میله فلزی تا نیمه در داخل یک فنجان چای داغ قرار گرفته است. اگر سطح مقطع این میله فلزی ثابت باشد و $k$ تابعی از دما نباشد و از اثرات انتهایی صرف نظر کنیم داریم :

تجمع + مصرفی + خروجی = تولید + ورودی

1. برای سمت چپ $q_x = q_{x+dx} + h_2 A'(T - T_\infty)$
سطح مقطع جابجایی $A' = Pdx$
2. برای سمت راست $q_x + h_1 A'(T_0 - T') = q_{x+dx}$
سطح مقطع هدایت $A$

*For 1:* $-kA\frac{dT}{dx}\Big|_x = -kA\frac{dT}{dx}\Big|_{x+dx} + h_2 p dx (T - T_\infty)$

تقسیم طرفین بر dx و استفاده از تعریف مشتق :

$$\frac{-kA\frac{dT}{dx}\Big|_{x+dx}-\left(-kA\frac{dT}{dx}\Big|_{x}\right)}{dx}=\frac{d}{dx}\left(kA\frac{dT}{dx}\right)=h_2p(T-T_\infty)$$

برای سمت راست میله :

$$\boxed{\frac{d^2T}{dx^2}=\frac{h_2p}{kA}(T-T_\infty)}$$

به همین ترتیب برای سمت چپ :

$$\frac{d^2T}{dx^2}=\frac{h_1p}{kA}(T'-T_\infty)$$

$\boxed{1}$ $\quad x=L\ :\ \frac{dT}{dx}$

$\boxed{2}$ و $\boxed{3}$ $\quad x=0\ :\ T=T'\ :\ \frac{dT}{dx}=\frac{dT'}{dx}$

$\boxed{4}$ $\quad x=-L\ :\ \frac{dT'}{dx}=0$

$$\frac{d^2T'}{dx^2}=\frac{h_1p}{kA}(T'-T_0)$$

که در آن $\quad T-T_\infty=\theta_1\quad,\quad \frac{h_2p}{kA}=m_1^2$

$$\rightarrow\quad m_1=\sqrt{\frac{h_2p}{kA}}$$

با استفاده از معادله مشخصه $\quad \frac{d^2\theta}{dx^2}-m_1^2=$

$$0\quad,\quad r^2-m^2=0\quad\rightarrow\quad r=\pm m$$

در نتیجه

$$\boxed{\theta=c_1e^{-m_1x}+c_2e^{m_1x}}$$

شرط مرزی اول : $\quad \frac{dT(L)}{dx}=\frac{d\theta_1(L)}{dx}=0$

$$\rightarrow\quad -c_1m_1e^{-m_1L}+c_2m_1e^{m_1L}=0$$

$$c_1=c_2\frac{e^{m_1L}}{e^{-m_1L}}\quad\Rightarrow\quad c_2e^{2m_1L}=c_1$$

معادله سمت چپ میله

$\theta_1=$

$$c_2\left[e^{m_1(2L-x)}+e^{m_1x}\right]=T-T_\infty\ \rightarrow\ \frac{d^2\theta_2}{dx^2}-\frac{h_1p}{kA}\theta_2=0$$

که در آن

$$\theta_2=T'-T_0\qquad,\qquad m_2=\sqrt{\frac{h_1p}{kA}}$$

شرط مرزی چهارم : $\quad \theta_2=D_1e^{-m_2x}+D_2e^{m_2x}\ \overset{\boxed{4}}{\Rightarrow}\ \frac{d\theta_2(-L)}{dx}=0$

$$0=-D_1e^{-m_2L}+D_2e^{m_2L}$$

در نتیجه $D_2 = D_1 e^{2m_2L}$

حال دو معادله داریم : $\theta_2 = D_1[e^{-m_2x} + e^{2m_2L} \times e^{m_2L}]$ , $\theta_2 = D_1[e^{m_2(2L+x)} + e^{-m_2x}] = T' - T_0$

برای حذف ضرائب از شرط مرزی دوم و سوم استفاده می نماییم :

$\boxed{2}$ $\quad at \quad x = 0 \;\rightarrow\; T = T'$ :

$\boxed{3}$ $\quad at \quad x = 0 \;\rightarrow\; \frac{dT}{dx} = \frac{dT'}{dx} \;\rightarrow\; \frac{d\theta_1}{dx} = \frac{d\theta_2}{dx}$

ابتدا از شرط مرزی سوم استفاده می کنیم تا یک رابطه بین $D_1, c_2$ به وجود آید .

$$D_1\left[m_2 e^{(2L+x)} - m_2 e^{-m_2x}\right] = \frac{d\theta_2}{dx}$$

حال $x$های ما صفر هستند (شرط مرزی سوم )

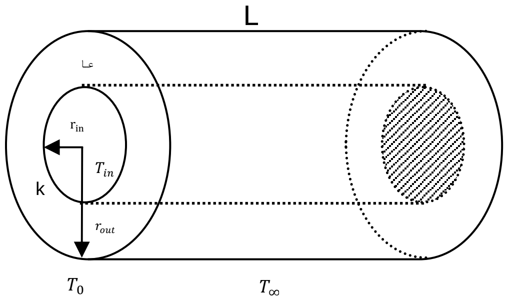
$c_2 e^{2m_1L} + 1 = D_1 e^{2m_2L} + 1 \quad \rightarrow \quad c_2 = D_1 e^{(m_1-m_2)2L}$

$\frac{d\theta_2(0)}{dx} \;\Rightarrow\; D_1(e^{2m_2L} - 1)m_2$

$\frac{d\theta_1(0)}{dx} \;\Rightarrow\; c_2(-e^{2m_1L} + 1)m_1$

از برابری این دو رابطه داریم : $D_1 = \frac{c_2 m_1(1-e^{2m_1L})}{(e^{2m_2L}-1)m_2}$

مثال 4: توزیع دما را در بین دو پوسته عایق بدست آورید .




$T_i$ دمای پوسته داخلی

$q_{in} - q_{out} = 0$

$-kA\left.\frac{dT}{dr}\right|_r + kA\left.\frac{dT}{dr}\right|_{r+dr} = 0$

$\frac{d}{dr}\left(kA\frac{dT}{dr}\right) = 0 \quad \begin{Bmatrix} r = r_0 & T = T_0 \\ r = r_{in} & T = T_{in} \end{Bmatrix}$

$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d}{dr}\left(k(2\pi r \times 1)\right)\frac{dT}{dr} = 0$

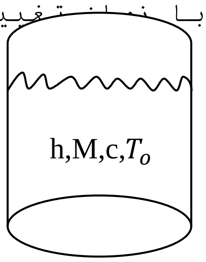
انتگرال گیری می کنیم $\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = 0 \;\rightarrow\; r\frac{dT}{dr} = c_1$

$\frac{dT}{dr} = \frac{c_1}{r} \;\rightarrow\; T = c_1 \ln r + c_2 \quad \begin{Bmatrix} T_0 = c_1 \ln r_0 + c_2 \\ T_i = c_1 \ln r_{in} + c_2 \end{Bmatrix}$

با استفاده از شروط مرزی $c_1$ و $c_2$ را بدست می آوریم :

$$T_o - T_i = c_1 \ln \frac{r_o}{r_{in}} \;\rightarrow\; c_1 = \frac{T_o - T_i}{\ln \frac{r_o}{r_i}} \quad , \quad c_2 = T_0 - \frac{T_o - T_i}{\ln \frac{r_o}{r_i}} . \ln r_o$$

مثال 5: یک دیگ بسته به سطح کلی $A(m^2)$ از طریق این سطح با مایع شدن بخار در دمای $T_s$ گرم می شود ، این ظرف حاوی مایعی به جرم M(kg) ، ظرفیت حرارتی c و دمای $T_o$ می باشد ، اگر ضریب انتقال حرارت همرفتی در فرایند گرم شدن ظرف $h(\frac{w}{m^2.℃})$ باشد ، دمای مایع چگونه با زمان تغییر می کند.




برای حل مسئله از قانون بقای انرژی استفاده می نماییم :

$$\Delta Q - \Delta W = \Delta E$$

چون کار انجام نمی شود داریم :
تجمع = خروجی - ورودی

انرژی ورودی از طریق هم رفت از کف دیگ صورت گرفته و صرف گرم شدن مایع داخل دیگ (تجمع) می گردد از اینرو داریم :

$$hA(T_s - T) = \rho c v \frac{dT}{dt}$$

چون معادله مرتبه اول روی مرز t است یک شرط اولیه نیاز داریم .

$$dt = \frac{\rho c v}{hA} \frac{dT}{T_s - T}$$

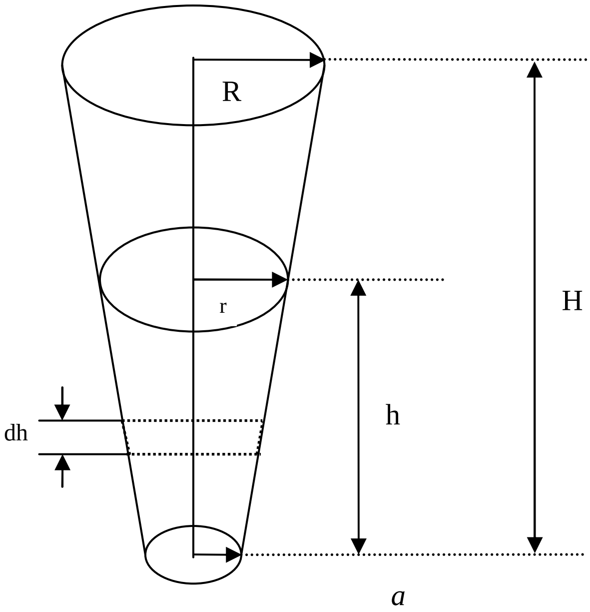
برای حل این معادله از تغییر متغیر استفاده کرده و انتگرال گیری می نماییم :

$$T_s - \mathrm{T} = \theta \quad t = \frac{-\rho c v}{hA} \frac{d\theta}{\theta} \;\rightarrow\; \theta = c_1 e^{\frac{-hA}{\rho c v} t}$$

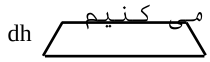
$t = 0 \;\rightarrow\; T = T_o$ در شرط اولیه $T_s - T_o = c_1 e^{\frac{-hA}{\rho c v}(0)} \quad \Rightarrow \quad c_1 = T_s - T_o$

$$\frac{T_s - T}{T_s - T_o} = e^{\frac{-hA}{\rho c v} t}$$

مثال 6: زمان لازم برای تخلیه کامل آب یک مخزن مخروطی به شکل زیر را از روزنه ای با سطح مقطع $a$ در انتهای آن بدست آورید . سرعت عبور آب از روزنه $V = K\sqrt{2gh}$ است .




برای حل این مسئله از قانون بقای ماده استفاده می کنیم




تجمع = خروجی - ورود; $\pi r^2$

با توجه به اینکه در این استوانه ورودی نداریم و خروجی باعث کاهش تجمع مواد در استوانه می گردد ، داریم :

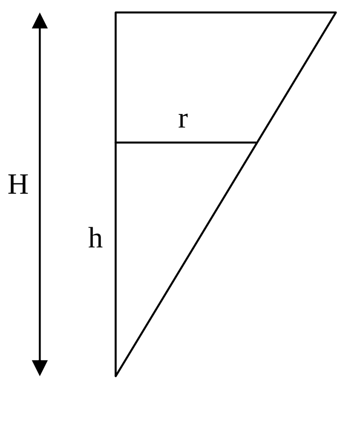
$$0-m_{\text{out}}=\frac{\text{dm}}{\text{dt}}$$

$$0-\rho Q_{out}=\frac{d\rho v}{dt}\rightarrow -\rho au=\rho\frac{dv}{dt}=\rho\frac{\pi r^2 dh}{dt}\rightarrow -\rho av\,dt=\rho(\pi r^2)dh$$

$$0-\rho(\pi r^2)dh=\rho av\,dt\;\Rightarrow\;\int_0^t dt=\int_H^0\frac{-\pi r^2}{av}\,dh$$

با توجه به اینکه استوانه در این مخروط r با h (شعاع با ارتفاع) تغییر می ک $R_o$ ابراین رابطه ای بین شعاع و ارتفاع باید پیدا نماییم .

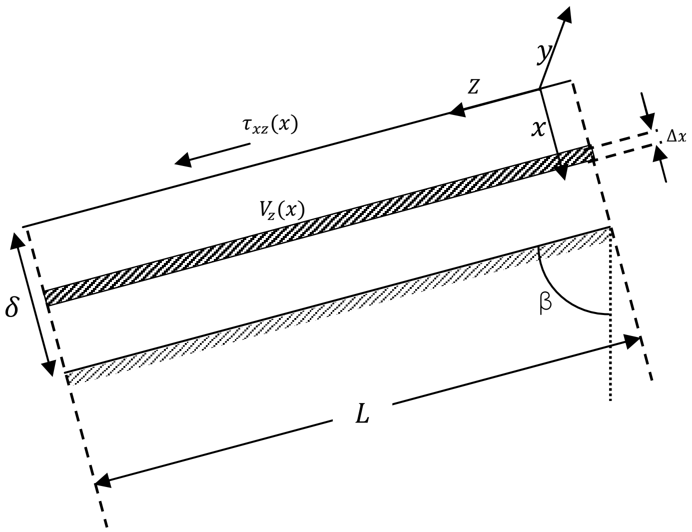
$$\frac{r}{h}=\frac{R_o}{H}\;\rightarrow\;\boxed{r=\frac{R_o}{H}h}$$




این رابطه را در رابطه انتگرال قرار داده و انتگرال گیری می کنیم :

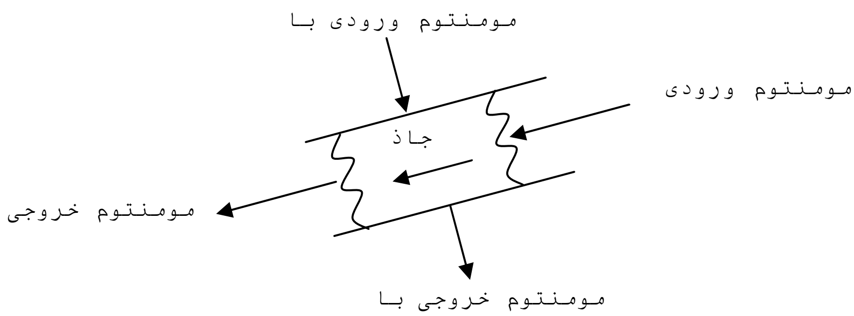
$$t=\int_0^H\frac{\pi(\frac{R^2}{H^2}h^2)}{a.k\sqrt{sgh}}\;\Rightarrow\;\boxed{t=\frac{\pi R^2}{a.k\sqrt{2g}H^2}\int_0^H h^{\frac{3}{2}}\,dh}$$

$$\Rightarrow\ t = \frac{2\pi r_o^2}{5akH^2\sqrt{2g}}\left(H^{5/2} - h^{5/2}\right)$$




در نظر بگیرید یک جریان سیال بر روی یک سطح شیبدار (چنین فیلم هایی در برج دیواره مرطوب مشاهده می شود) . در نظر بگیرید که ویسکوزیته و دانسیته سیال ثابت است .ما بر

$$0 = \text{تولید} + \text{خروجی} - \text{ورودی}$$




$x$ مومنتوم ورودی عمود بر سطح در $Lw(\tau_{xz})|_x$

مومنتوم خروجی عمود بر سطح در $Lw(\tau_{xz})|_{x+\Delta x}$ $x+\Delta x$

مومنتوم ورودی عمود بر سطح در $z=0$ $(w\Delta x V_z)(\rho v_z)|_{z=0}$

$z=L$ مومنتوم ورودی عمود بر سطح در $(w\Delta x V_z)(\rho v_z)|_{z=L}$

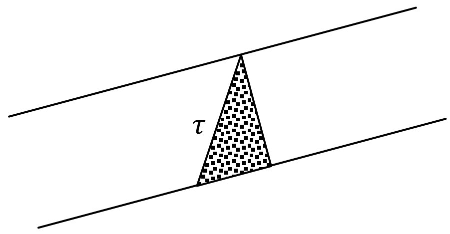
نیروی وزن $(Lw\Delta x)(\rho g\cos\beta)$

$$Lw\tau_{xz}|_x - Lw\tau_{xz}|_{x+\Delta x} + w\Delta x\rho v_x^2|_{z=0} - w\Delta x\rho v_x^2|_{z=L} + Lw\Delta x\rho g\cos\beta = 0$$

$$v_x|_{z=0} = v_x|_{z=L}$$

$$\tau_{x_2}\big|_{x+\Delta x} - \tau_{x_2}\big|_x = \rho g\Delta x\cos\beta \ \Rightarrow \frac{\tau_{x_2}\big|_{x+\Delta x} - \tau_{x_2}\big|_x}{\Delta x} = \rho g\cos\beta$$

$$\frac{d(\tau_{x_2})}{dx} = \rho g \cos\beta \;\rightarrow\; \tau_{x_2} = \rho g \cos\beta x + c_1$$




$$at \quad x = 0 \quad \tau_{x_2} = 0$$

$$\tau_{x_2} = \rho g \cos\beta x$$

$$\tau_{x_2} = -\mu \frac{dV_z}{dx}$$

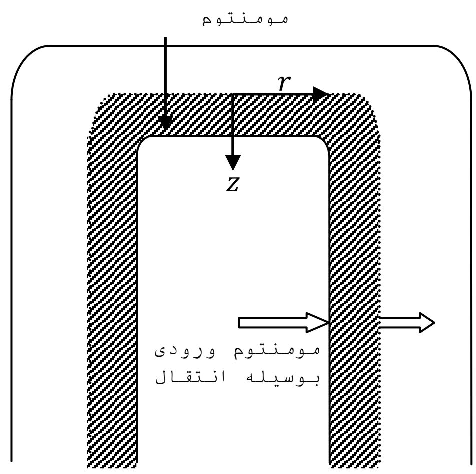
$$\frac{dV_z}{dx} = -\frac{\rho g \cos\beta}{\mu} x \;\Rightarrow\; V_z = \frac{-\rho g \cos\beta}{2\mu} . x^2 + c_2$$

$$at \quad x = \delta \quad v_z = 0$$

$$\Rightarrow\; c_2 = \frac{\rho g \cos\beta}{2\mu} \delta^2$$

$$\Rightarrow \boxed{V_z = \frac{\rho g \cos\beta}{2\mu} (\delta^2 - x^2)}$$

جریان آرامی را در نظر بگیرید که با دانسیته ثابت $\rho$ در یک لوله خیلی بلند با طول $L$ و شعاع $R$ در حال جریان است معادله توزیع سرعت را در این لوله بیابید.




$(2\pi rL\,\tau_{rz})|_r$ مومنتوم ورودی از طریق سیلندر

$(2\pi rL\,\tau_{rz})|_{r+dr}$ مومنتوم خروجی از طریق سطح سیلندر

$(2\pi r\Delta r U_z)\rho U_z|_{z=0}$ مومنتوم ورودی از سطح المان

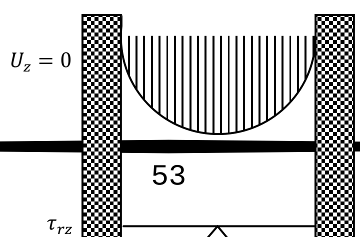
$(2\pi r\Delta r U_z)\rho U_z|_{z=L}$ مومنتوم خروجی از سطح المان

$(2\pi r\Delta r)L\rho g$ نیروی وزن

$$(2\pi rL\tau_{rz})|_r - (2\pi rL\tau_{rz})|_{r+\Delta r} + (2\pi r\Delta r U_z)\rho u_z|_{z=0} = 0$$

$$-(2\pi r\Delta r\, U_z)\rho u_z|_{z=L} + (2\pi r\Delta r)L\rho g + (2\pi r\Delta r)p_o - (2\pi r\Delta r)p_L = 0$$

به علت تراکم پذیر بودن سیال داریم :    $U_z|_{z=0} = U_z|_{z=L}$



$$\lim_{\Delta r\to 0}\left(\frac{(r\tau_{rz})|_{r+\Delta r}-(r\tau_{rz})|_{r}}{\Delta r}\right)=\left(\frac{P_o-P_L}{L}+\rho g\right)r$$

$$\frac{d(r\tau_{rz})}{dr}=\left(\frac{P_o-P_L}{2}+\rho g\right)r$$

$$P=p+\rho gh=p-\rho gz$$

$$\frac{d}{dr}(r\tau_{rz})=\left(\frac{P_o-P_L}{L}\right)r$$

$$r\tau_{rz}=\left(\frac{P_o-P_L}{L}\right)\frac{r^2}{2}+c_1$$

$$\tau_{rz}=\left(\frac{P_o-P_L}{2L}\right)r+\frac{c_1}{r}$$

$$at\ \ r=0\ \ \tau_{rz}=0\ \Rightarrow\ c_1=0$$

$$\tau_{rz}=-\mu\frac{dv_z}{dr}\rightarrow-\mu\frac{dv_z}{dr}=\left(\frac{P_o-P_L}{2L}\right)r$$

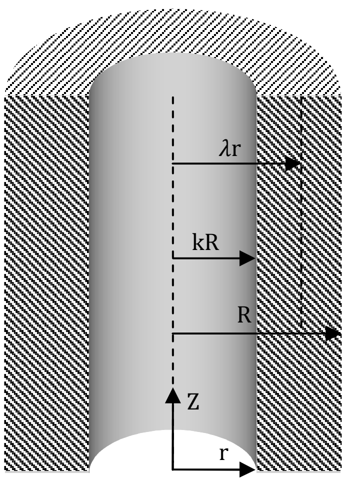
$$v_2=-\left(\frac{P_o-P_L}{4\mu L}\right)r^2+c_2 \qquad\qquad at\ r=R\ \rightarrow\ v_z=0$$

$$\boxed{v_2=\left(\frac{P_o-P_L}{4\mu L}\right)(R^2-r^2)}$$

$$V_{2,max}=v_2|_{r=0}=\frac{P_o-P_L}{4\mu L}(R^2)$$

یک جریان پایدار تراکم ناپذیر از یک ناحیه میان دو سیلندر هم مرکز با شعاع kR و R عبور می کند .

مانند قبل یک المان می گیریم و نتیجه به صورت زیر می شود :



$$\begin{cases}\frac{d}{dr}(r\tau_{rz}) = \left(\frac{P_o - P_L}{L}\right)r \Rightarrow \tau_{rz} = \frac{P_o - P_L}{L}r + \frac{C_1}{r} \\ P = p + \rho gz\end{cases}$$

به راحتی می توانیم میزان $C_1$ را محاسبه کنیم در حالیکه ما هیچ اطلاعاتی در خصوص ممنتوم بر روی هیچ کدام از سطوح نداریم در نهایت فقط می توانیم بگوییم که در نقطه ای به شعاع $r = \lambda R$ سرعت ماکزیمم خواهد بود و ممنتوم صفر است .

$$0 = \frac{P_o - P_L}{2L}\lambda R + \frac{C_1}{\lambda R} \to C_1 = \frac{-(P_o - P_L)}{2L}(\lambda R)^2$$

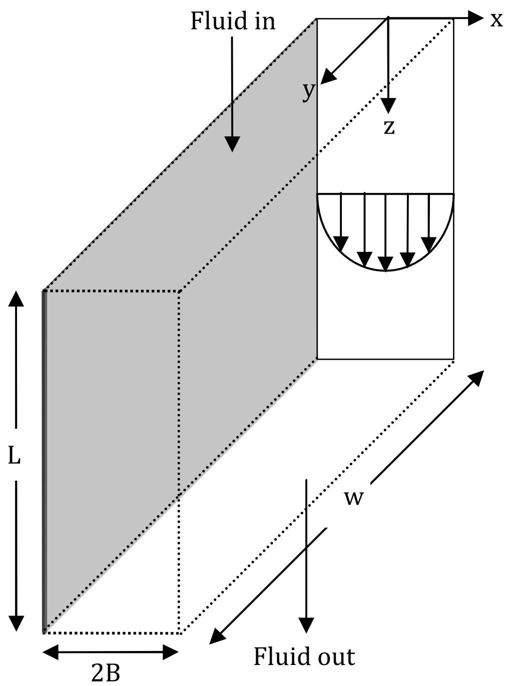
$$\tau_{rz} = \frac{(P_o - P_L)R}{2L}\left[\left(\frac{r}{R}\right) - \lambda^2\left(\frac{R}{r}\right)\right]$$

$$\frac{dV_2}{dr} = \frac{-(P_o - P_L)R^2}{2L\mu}\left[\left(\frac{r}{R}\right) - \lambda^2\left(\frac{R}{r}\right)\right]$$

$$V_2 = \frac{-(P_o - P_L)R^2}{4L\mu}\left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2\lambda^2 \ln\left(\frac{r}{R}\right) + C_2\right]$$

$$\begin{cases} at \quad r = kR \quad \to \quad V_2 = 0 \\ at \quad r = R \quad \to \quad V_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 = \frac{-(P_o - P_L)R^2}{4L\mu}(k^2 - 2\lambda^2 \ln k + C_2)$$

$$0 = \frac{-(P_o - P_L)R^2}{4L\mu}(1 + C_2) \Rightarrow \begin{cases} C_2 = -1 \\ 2\lambda^2 = \dfrac{1 - k^2}{\ln(1/k)} \end{cases}$$




در نظر بگیرید یک سیال با دانسیته ρ در یک جریان تراکم ناپذیر و آرام از یک شکاف با طول L و عرض W و ضخامت 2B عبور می کند جریان تحت تأثیر $\Delta P$ و نیروی وزن می باشد .

ممنتوم بر روی Z خواهد بود :

ورود - خروج + تولید = تجمع

ممنتوم می تواند به وسیله مکانیسم مولکولی و جابجایی داخل و خارج شکاف شود .

$$(Lw\tau_{xz})|_{x} - (Lw\tau_{xz})|_{x+\Delta x} + (P_o - P_L)w\,\Delta x + \rho gwL\Delta x = 0$$

$$\frac{\tau_{xz}|_{x+\Delta x} - \tau_{xz}|_{x}}{\Delta x} = \frac{P_o - P_L + \rho gL}{L}$$

با توجه به اینکه P رو به بالا در نظر گرفته می شود :

$$P = p + \rho g h \rightarrow P = p - \rho g z$$

$$\left.\begin{array}{ll} at \;\; z=0 & P_o = p_o + 0 = p_o \\ at \;\; z=L & P_L = p_L - \rho g L \end{array}\right\} \rightarrow P_o - P_L = p_o - p_L + \rho g L$$

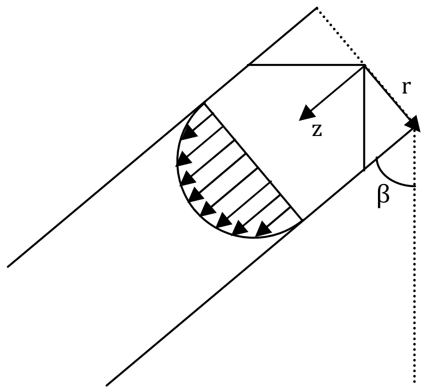
$$\frac{d\tau_{xz}}{dx} = \frac{\Delta p}{L} \rightarrow \tau_{xz} = \frac{\Delta p}{L}x + C_1 \rightarrow -\mu\frac{dv_z}{dx} = \frac{\Delta p}{L}x + C_1$$

$$\Rightarrow v_z = -\frac{\Delta p}{2\mu L}x^2 - \frac{C_1}{\mu}x + C_2$$

$$\left.\begin{array}{lll} at \;\; x=B & v_z = 0 & \rightarrow 0 = \frac{-\Delta p}{2\mu L}B^2 - \frac{C_1}{\mu}B + C_2 \\ at \;\; x=-B & v_z = 0 & \rightarrow 0 = \frac{-\Delta p}{2\mu L}B^2 + \frac{C_1}{\mu}B + C_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} C_1 = 0 \\ C_2 = \frac{\Delta p B^2}{2\mu L} \end{array}$$

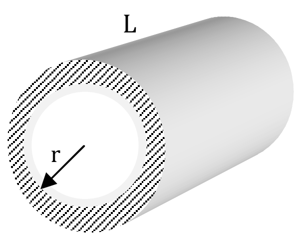
$$\Rightarrow \; v_z = \frac{\Delta p B^2}{2\mu L}\left[1 - (\frac{x}{B})^2\right]$$

یک لوله در نظر بگیرید که یک سیال با دانسیته ثابت و جریان آرام در داخل آن در حال جریان است ، این لوله با سطح عمود زاویه β تشکیل می دهد اثرات انتهایی به دلیل بلند بودن لوله قابل صرف نظر کردن است. جریان بر اثر اختلاف فشار و وزن در لوله صورت می گیرد. توابع سرعت سیال در لوله را بدست آورید.




ممنتوم بر روی سطح z خواهد بود :

ورودی - خروجی + تولید = تجمع




تعریف می کنیم که :

$P = p + \rho g h$ و h = ارتفاع در خلاف جهت وزن = $-z\cos\beta$

$$\Rightarrow P_o = P \;\; \text{و} \;\; P_L = p_L - \rho g L\cos\beta$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dr}(r\tau_{rz}) = \frac{\Delta P}{L}r \rightarrow \tau_{rz} = \frac{\Delta P}{2L}r + \frac{C_1}{r}$$

$$-\mu\frac{dv_z}{dr} = \frac{\Delta P}{2L}r + \frac{C_1}{r} \rightarrow \frac{dv_z}{dr} = \frac{-\Delta P}{2\mu L}r - \frac{C_1}{r\mu} \Rightarrow v_z = \frac{-\Delta P}{4\mu L}r^2 - \frac{C_1}{\mu}\ln r + C_2$$

I. $at \quad r = 0 \quad \tau_{rz} = 0$
II. $at \quad r = R \quad v_z = 0$

بنابراین در شرط مرزی I چون $\tau_{rz}$ نامعین نمی باشد پس $C_1 = 0$

$$v_z = \frac{-\Delta P}{4\mu L} R^2 + C_2 \quad at \;\; r = R$$

$$\Rightarrow v_z = \frac{\Delta P}{4\mu L}(R^2 - r^2)$$

**ضمائم**

قواعد مشتق گیري

فرض مي کنيم توابع g(x) ، $f(x)$ توابع مشتق پذیر باشند در اینصورت :

I. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
II. $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$
III. $(fg)'(x) = f'(x)g'(x) + f'(x)g'(x)$
IV. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
V. $(cf)'(x) = cf'(x)$

c مقدار ثابت

با توجه به روابط بالا نتیجه مي شود

فرض کنید $(n \in N)\,, f(x) = x^n$ در اینصورت $f'(x) = nx^{n-1}$

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $\sin x$ | $\boldsymbol{\cos x}$ |
| $\cos x$ | $\boldsymbol{-\sin x}$ |
| $\tan x$ | $\boldsymbol{1 + tan^2x = sec^2x}$ |
| $\cot x$ | $\boldsymbol{-(1 + cot^2x) = -csc^2x}$ |
| $\sec x$ | $\boldsymbol{\sec x\,.\tan x}$ |
| $\csc x$ | $\boldsymbol{-\csc x.\cot x}$ |

مشتق توابع معکوس مثلثاتي

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $\sin^{-1} u$ | $\boldsymbol{\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}}$ |
| $\cos^{-1} u$ | $\boldsymbol{\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}}$ |
| $\tan^{-1} u$ | $\boldsymbol{\frac{-u'}{1-u^2}}$ |

| | |
|---|---|
| $\cot^{-1} u$ | $\dfrac{-u'}{1-u^2}$ |
| $\sec^{-1} u$ | $\dfrac{-u'}{u\sqrt{u^2-1}}$ |
| $\csc^{-1} u$ | $\dfrac{-u'}{u\sqrt{u^2-1}}$ |

مثال : مشتق تابع $y=\sin^{-1}(\cos^{-1}(1+x^2))$ را بدست آورید .

حل: فرض می کنیم $y=\sin^{-1} u$ , $u=\cos^{-1}(1+x^2)$, $v=1+x^2$ باشد ، در این صورت بنا به قاعده زنجیره اي داریم :

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-v^2}}\cdot 2x=\frac{-2x}{\sqrt{1-(\cos^{-1}(1+x^2))^2}\sqrt{1-(1+x^2)^2}}$$

$$\begin{cases} sin^2x=\dfrac{1-\cos 2x}{2} \ , cos^2x=\dfrac{1+\cos 2x}{2} \\ sin^2x=1-cos^2x \, , cos^2x=1-sin^2x \end{cases}$$

توابع هذلولی (هیپربولیک )

در این قسمت ما ترکیب های معیني از توابع $e^x, e^{-x}$ را که کاربردهای بسیار زیادی در ریاضیات مهندسي دارند را مورد بررسی قرار میدهیم .

این توابع از بسیاری جهات تشابه نزدیکی با توابع مثلثاتی دارند زیرا همانگونه که مقادیر توابع مثلثاتی با مختصات نقاط یک دایره متناظر مي شوند ، توابع هذلولی نیز متناظر با مختصات یک هذلولی متساوی الساقین مرتبط می شوند.

تعریف : تابع سینوسی هذلولی را با $\sinh x$ نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می شود :

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

همچنین تابع کسینوسی هذلولی را با $\cosh x$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

تعریف

مروری بر روش های تحلیلی حل معادلات دیفرانسیل

I. تابع تانژانت هذلولی را با $\tanh x$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

II. تابع کتانژانت هذلولی را با $\coth x$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$$

III. تابع سکانت و کسکانت هذلولی را به ترتیب با $\operatorname{sech} x$ ,$\operatorname{csch} x$ نشان داده و به صورت زیرتعریف می کنیم :

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^{x} + e^{-x}} \quad , \quad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^{x} - e^{-x}}$$

روابطی دیگر بین توابع هذلولی

1) $\cosh^2 x - sinh^2 x = 1$

2) $1 - tanh^2 x = sech^2 x$

3) $1 - coyh^2 x = -csch^2 x$

4) $\cosh x + \sinh x = e^{x}$

5) $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$

6) $\sinh(x+y) = \sinh x \cdot \cosh y + \cosh x \cdot \sinh y$

7) $\cosh(x+y) = \cosh x \cdot \cosh y + \sinh x \cdot \sinh y$

8) $\sinh 2x = 2 \sinh x \cdot \cosh x$

9) $\cosh 2x = cosh^2 x + \sinh^2 x$

10) $\cosh 2x = 2\sinh^2 x + 1$

11) $\cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1$

توابع معکوس هذلولی :

توابع معکوس هذلولی را می توان بر حسب لگاریتم طبیعی بیان کرد ، زیرا توابع هذلولی را بر حسب توابع نمایی تعریف کردیم و تابع لگاریتم طبیعی معکوس تابع نمایی می باشد :

1) $\sinh^{-1} x = \ln(\mathrm{x} + \sqrt{\mathrm{x}^2 + 1})$

2) $\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ , $x \geq 1$

3) $\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ , $|x| < 1$

4) $\coth^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ , $|x| < 1$

5) $\operatorname{sech}^{-1} x = \ln(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x})$ , $0 < x \leq 1$

6) $\operatorname{csch}^{-1} x = \ln(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|})$ , $x \neq 0$

مشتق توابع معکوس هذلولی

1) $y = \sinh^{-1} x \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

2) $y = \cosh^{-1} x \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad |x| > 1$

3) $y = \tanh^{-1} x \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad |x| < 1$

4) $y = \coth^{-1} x \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad |x| > 1$

اگر u تابعی مشتق پذیر ( بر حسب x ) باشد آنگاه داریم :

1) $\frac{d}{dx}(\sinh^{-1} u) = \frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$

2) $\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} u) = \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}} \quad |u| > 1$

3) $\frac{d}{dx}(\tanh^{-1} u) = \frac{u'}{1-u^2} \quad |u| < 1$

4) $\frac{d}{dx}(\coth^{-1} u) = \frac{u'}{1+u^2} \quad |u| > 1$

5) $\frac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1} u) = \frac{-u'}{u\sqrt{1-u^2}} \quad 0 < u < 1$

6) $\frac{d}{dx}(\operatorname{csch}^{-1} u) = \frac{-u'}{|u|\sqrt{1+u^2}} \quad u \neq 0$

- توابع نمايي :

تابع e ای $y = e^x$ قاعده تناظر این تابع را می توان به کمک عبارتی صریح شامل بی نهایت عمل گویا به دست داد ، که از آن بتوان مقدار تابع را به ازای هر مقدار حقیقی (یا مختلط x)، با هر دلخواه ، توسط قرار دادن در سری :

$$y = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

محاسبه کرد .

به ازای مقدار خاص $x = 1$ مقدار عدد متعالی e = 2.718281828459 به دست می آید . بعضی از جدولهای لگاریتم شامل مقادیر گرد شده این تابع است .

جدول مقادیر تابع $y = e^x$

| X | ... | -3 | -2 | -1 | 0 | 1/3 | 1/2 | 1 | 2 | 3 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | ... | 0.05 | 0.14 | 0.37 | 1 | 1.4 | 1.65 | 2.72 | 7.39 | 20.90 | ... |

بنا به قواعد توان ها یا شاخص ها ، $e^0 = 1, e^{-x} = \frac{1}{e^{-x}}$ . به علت اینکه تابع $y = e^x$ ، به ازای مقادیر مثبت x ، تنها مقادیر مثبت را اختیار می کند و،

چون $x \to \infty$ ،بطور یکنوا و بدون حد صعود می کنند ، نتیجه می شود که تابع $y = e^{-x}$ نیز تنها مقادیر مثبت را اختیار می کند ، و مقادیر y یا آرگومان صعودی x بطور یکنوا صعود می کند .

همچنین داریم :

$$y = a^x = e^{x \ln a}$$

توابع لگاریتمی

تابع $y = \log_a x$ این تابع وارون نمایی $y = a^x$ است، که البته در کل حوزه تعریف خود یکنواست . به علت اینکه برد تابع نمایی $0 < y < +\infty$ است ، تابع لگاریتمي را می توان تنها به ازای مقادیر مثبت آرگومان تعریف کرد، و به این ترتیب دارای حوزه تعریف $0 < y < +\infty$ است. توابع وارون خاص عبارت اند $y = \ln x$: به ازای $y = e^x$ و $y = \log x$ به ازای $y = 10^x$ در نتیجه نمودارهای آنها با استفاده از قرینه های نمودارهای $y = e^x$ و $y = 10^x$ نسبت به خط $y = x$ به دست می آیند . تابع $y = \log_a x$ واضح است که $y = \log_x X$ ، بنابراین مقادیر تابع از ضرب در ثابت k داده شده اند . مقدار آن می تواند منفی نیز باشد ، زیرا به ازای $y = -X$ ،با $x > 0$ ، به دست می آوریم.

$$y = \log_a -X = \log_a(\frac{1}{X^x}) = -1 \ \log_a X^x = -x \ \log_a X$$

بخصوص به ازای $k = -1$ نمودار تابع نتیجه به دست آوردن قرینه تابع $y = \log_a x$ نسبت به محور$x$+ هاست . تابع

$$\boxed{y = -\log_a x = \log_a x^{-1} = \log_a(1/x)}$$

وارون تابع $y = a^{-x}$ است.

ارتباط بین توابع مثلثاتی و مستدیر

$$1) \quad \sin(\arcsin x) = X \quad , \quad 2) \quad \cos(\arccos x) = x$$

$$3) \quad \operatorname{arccot} x = \arctan(1/x)$$

$$4) \ \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2} \quad , \quad \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$5) \ \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2} \quad , \quad \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$6) \ \tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \quad , \quad \tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$$

ارتباط بین توابع مثلثاتی و توابع نمایی :

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \quad , \quad e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$$

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \quad , \quad \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

$$\tan\varphi = -i\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}} \quad , \quad \cot\varphi = +i\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}$$

$$e^{i\varphi} = ix + \sqrt{1-x^2}$$

$$i\varphi = i\arcsin x = \ln(ix + \sqrt{1-x^2})$$

$$\arcsin x = -i\ln(xi + \sqrt{1-x^2}) \quad , \quad \arccos x = -i\ln(x + i\sqrt{1-x^2})$$

$$\arctan x = -i\ln\sqrt{\frac{1+xi}{1-xi}} \quad , \quad \operatorname{arccot} x = -i\ln\sqrt{\frac{1+xi}{1-xi}}$$

ارتباط توابع مثلثاتی :

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \quad , \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \quad , \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta - 1}{\cot\beta + \cot\alpha}$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\cot(\alpha-\beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha}$$

توابع دو برابر زوایا و نصف زوایا :

$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\sin\varphi = \frac{2\sin\varphi}{2\cos\varphi}/2$$

$$\cos 2\varphi = cos^2\varphi - sin^2\varphi = 1 - 2sin^2\varphi = 2cos^2\varphi - 1$$

$$\cos\varphi = \frac{\frac{cos^2\varphi}{2sin^2\varphi}}{2} = 1 - \frac{2sin^2\varphi}{2} = \frac{2cos^2\varphi}{2} - 1$$

$$\tan 2\varphi = \frac{2\tan\varphi}{1 - tan^2\varphi} = \frac{2}{\cot\varphi - \tan\varphi}$$

$$\tan\varphi = \frac{2\tan\varphi/2}{1-tan^2\varphi/2} = \frac{2}{\cot\varphi/2 - \tan\varphi/2}$$

$$\cot 2\varphi = \frac{cot^2\varphi - 1}{2\cot\varphi} = \frac{\cot\varphi - \tan\varphi}{2}$$

$$\cot\varphi = \frac{\cot^2\frac{\varphi}{2} - 1}{2\cot\frac{\varphi}{2}} = \frac{\cot\frac{\varphi}{2} - \tan\frac{\varphi}{2}}{2}$$

$$\sin\varphi = +\sqrt{\frac{1-\cos 2\varphi}{2}}$$

$$\cos\varphi = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\varphi}{2}}$$

$$\tan\varphi = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\varphi}{1+\cos 2\varphi}} = \frac{\sin 2\varphi}{1+\cos 2\varphi} = \frac{1-\cos 2\varphi}{\sin 2\varphi}$$

$$\cot\varphi = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\varphi}{1-\cos 2\varphi}} = \frac{\sin 2\varphi}{1-\cos 2\varphi} = \frac{1+\cos 2\varphi}{\sin 2\varphi}$$

$$\sin\varphi/2 = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}$$

$$\cos\varphi/2 = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}}$$

$$\tan\frac{\varphi}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}} = \frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} = \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

$$\cot\frac{\varphi}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}} = \frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi} = \frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

$$\sin 2\varphi = \frac{2\tan\varphi}{1+\tan^2\varphi} \qquad \cos 2\varphi = \frac{1-\tan^2\varphi}{1+\tan^2\varphi}$$

$$\sin\varphi = \frac{2\tan\varphi/2}{1+\tan^2\varphi/2} \qquad \cos\varphi = \frac{1-\tan^2\varphi/2}{1+\tan^2\varphi/2}$$

توابع زوایای چند گانه (مضربدار)

$$\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$$

$$\sin 4\varphi = 4\sin\varphi\cos\varphi - 8\sin^3\varphi\cos\varphi$$

$$\sin 5\varphi = 5\sin\varphi - 20\sin^3\varphi + 16\sin^5\varphi$$

$$\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$$

$$\cos 4\varphi = 8\cos^4\varphi - 8\cos^2\varphi + 1$$

$$\cos 5\varphi = 16\cos^5\varphi - 20\cos^3\varphi + 5\cos\varphi$$

$$\tan 3\varphi = \frac{3\tan\varphi - \tan^3\varphi}{1 - 3\tan^2\varphi}$$

$$\tan 4\varphi = \frac{4\tan\varphi - 4\tan^3\varphi}{1 - 6\tan^2\varphi + \tan^4\varphi}$$

$$\cot 3\varphi = \frac{\cot^3\varphi - 3\cot\varphi}{3\cot^2\varphi - 1}$$

$$\cot 4\varphi = \frac{\cot^4\varphi - 6\cot^2\varphi + 1}{4\cot^3\varphi - 4\cot\varphi}$$

مجموع تفاضل و حاصلضرب توابع مثلثاتی

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\tan\alpha + \tan\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \qquad \cot\alpha + \cot\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\tan\alpha - \tan\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \qquad \cot\alpha - \cot\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\sin(45° + \alpha) = \sqrt{2}\cos(45° - \alpha)$$

$$\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\sin(45° - \alpha) = \sqrt{2}\cos(45° + \alpha)$$

$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\beta - \sin^2\alpha$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) - \sin(\alpha+\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta)]$$

$$\tan\alpha\tan\beta = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\cot\alpha+\cot\beta} = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{\cot\alpha-\cot\beta}$$

$$\cot\alpha\cot\beta = \frac{\cot\alpha+\cot\beta}{\tan\alpha+\tan\beta} = -\frac{\cot\alpha-\cot\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}$$

$$\tan\alpha\cot\beta = \frac{\tan\alpha+\cot\beta}{\cot\alpha+\tan\beta} = -\frac{\tan\alpha-\cot\beta}{\cot\alpha-\tan\beta}$$

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = \frac{1}{4}[\sin(\alpha+\beta-\gamma)+\sin(\beta+\gamma-\alpha)+\sin(\gamma+\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta+\gamma)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma = \frac{1}{4}[\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\cos(\gamma+\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta+\gamma)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma = \frac{1}{4}[-\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\cos(\gamma+\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta+\gamma)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma = \frac{1}{4}[\sin(\alpha+\beta-\gamma)-\sin(\beta+\gamma-\alpha)+\sin(\gamma+\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta+\gamma)]$$

توانهای توابع مثلثاتی

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi) \qquad \cos^2\varphi = \frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)$$

$$\sin^3\varphi = \frac{1}{4}(3\sin\varphi-\cos 3\varphi) \qquad \cos^3\varphi = \frac{1}{4}(3\cos\varphi+\cos 3\varphi)$$

$$\sin^4\varphi = \frac{1}{8}(\cos 4\varphi-4\cos 2\varphi+3) \qquad \cos^4\varphi = \frac{1}{8}(\cos 4\varphi+4\cos 2\varphi+3)$$

$$\sin^5\varphi = \frac{1}{16}(10\sin\varphi-5\sin 3\varphi+\sin 5\varphi) \qquad \cos^5\varphi = \frac{1}{16}(10\cos\varphi-5\cos 3\varphi+\cos 5\varphi)$$