۲- حل معادله دیفرانسیل مرتبه دوم معمولی

حل معادلات دیفرانسیل مرتبه ی دوم خطی

$$\boxed{P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = G(x)} \qquad (۳)$$

صورت کلی معادلات مرتبه دوم خطی به صورت معادله بالا (معادله ۳) می باشد. در این معادله در صورتیکه $G(x)=0$ باشد، معادله همگن است و اگر $G(x)\neq0$ باشد معادله ناهمگن خواهد بود.

۲-۱- حل معادلات مرتبه ی دوم خطی با ضرایب ثابت :

$$\boxed{ay'' + by' + cy = G(x)} \qquad (۴)$$

چنانچه در فرم کلی معادلات مرتبه دوم (معادله ۳) $P(x)$، $Q(x)$ ، $R(x)$ اعداد ثابت باشند در این صورت معادله به صورت معادله مرتبه دوم خطی با ضرائب ثابت (معادله ۴) خواهد بود.

در صورتیکه $G(x)=0$ یا معادله همگن باشد این معادلات یک جواب همگن y_h خواهد داشت. در صورتیکه $G(x)\neq0$ یا معادله ناهمگن باشد این معادله دو نوع جواب خواهد داشت که جواب دوم بر اساس جوابهای معادله همگن y_h و $G(x)$ بدست خواهد آمد و جواب خصوصی نام دارد و نتیجه به صورت $y = y_h + y_p$ می باشد که در آن :

y_h : جواب همگن بر اساس $G(x)=0$

y_p : جواب ناهمگن یا خصوصی با احتساب $G(x) \neq 0$

بنابراین برای حل این نوع معادلات ابتدا G(x)=0 را در معادله قرار می دهیم که در این صورت معادله به صورت زیر خواهد شد. بطوریکه در این معادله هیچ تابعی از x وجود ندارد.

$$ay'' + by' + cy = 0$$

این معادله دارای یک معادله مشخصه به شکل زیر خواهد بود. این معادله بدین صورت بدست می آید که به ازای هر مشتق یک r در معادله قرار می گیرد.

$$ar^2 + br + c = 0$$

جوابهای این معادله مشخصه به صورت :

$$r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

خواهد بود که با توجه به Δ سه حالت ممکن است وجود داشته باشد که متناسب با آن سه جواب بدست می آید.

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \begin{cases} \Delta > 0 : & r = r_1 \text{ و } r = r_2 \rightarrow y_h = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} \\ \Delta = 0 : & r = r_1 = r_2 \rightarrow y_h = (A + Bx)e^{rx} \\ \Delta < 0 : r = \alpha \pm \beta i \rightarrow & y_h = e^{\alpha x}(A \sin \beta x + B \cos \beta x) \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \qquad , \beta = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

مثال ۱۴) معادله زیر را حل نمایید.

$$y'' + 16y = 0$$

حل - با مقایسه با معادله ۴

$$\boldsymbol{ay'' + by' + cy = G(x)}$$

داریم:

$$a=1,\ b=0,\ c=16,\ G(x)=0$$

بنابراین معادله مشخصه آن بصورت زیر می شود:

$$\mathrm{r}^2 + 16 = 0$$

که در آن

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 - 4(1)(16) = -64 < 0$$

و جواب آن

$$\mathrm{r}^2 + 16 = 0 \ \rightarrow \ r = \pm 4i \begin{cases} \alpha = -\dfrac{b}{2a} = 0 \\ \beta = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 4 \end{cases}$$

بنابراین جواب معادله به صورت زیر خواهد بود.

$$\mathbf{y_h = (A\sin 4x + B\cos 4x)}$$

مثال ۱۵) معادله زیر را حل نمایید.

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

حل - با مقایسه با معادله ۴

$$\boldsymbol{a y'' + b y' + c y = G(x)}$$

داریم:

$$a=1,\ b=-3,\ c=2,\ G(x)=0$$

بنابراین معادله مشخصه آن بصورت زیر می شود:

$$\mathrm{r}^2 - 3\mathrm{r} + 2 = 0$$

که در آن

$$b^2 - 4ac = 9 - 8 = 1 \rightarrow \Delta > 0$$

بنابراین

$$r_1, r_2 = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2(1)} \begin{cases} r_1 = 2 \\ r_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{y_h = A e^{2x} + B e^{x}}$$

$y_1 = e^{2x}$

$y_2 = e^{x}$

بدست آوردن جواب خصوصی در شرایط $G(x) \neq 0$:

برای حل اینگونه معادلات در ابتدا فرض می کنیم که $G(x)=0$ و جوابهای همگن (y_1,y_2) را بدست می آوریم.

پس از تعیین جوابهای مستقل خطی y_1 و y_2 برای حالت همگن، جواب نا همگن یا جواب خصوصی از رابطه زیر بدست می آید:

$$\boldsymbol{y_p = (-y_1)\int \frac{G(x)y_2\,dx}{\omega} + y_2\int \frac{G(x)y_1\,dx}{\omega}}$$

که در آن رانسکین ω از رابطه زیر بدست می آید.

$$\omega = y_1y'_2 - y_2y'_1$$

شرط جواب رسیدن این معادله این است که $\omega = 0$ باشد .

چگونه این جواب بدست می آید:

یک روش مناسب برای یافتن جواب خصوصی y_p ،"روش تغییر پارامترها" می باشد که در این روش فرض می شود که $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$ باشد . برای یافتن توابع u_1 و u_2 ، مشتق مرتبه اول و دوم y_p محاسبه شده و در معادله دیفرانسیل جایگذاری می شود .

$$y'_p = u'_1y_1 + u'_2y_2 + u_1y'_1 + u_2y'_2$$

با توجه به اینکه u_1 و u_2 توابع دلخواه می باشند، می توانیم فرض کنیم که $u'_1y_1 + u'_2y_2 = 0$ در نتیجه پس از ساده سازی داریم:

$$y'_p = u_1y'_1 + u_2y'_2$$

و حال مشتق دوم آن $y''_p = u_1 y''_1 + u'_1 y'_1 + u_2 y''_2 + u'_2 y'_2$ می گردد. با جایگذاری در معادله اصلی و مرتب کردن آن و با توجه به اینکه y_1 و y_2 جواب های معادله همگن

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

می باشند داریم :

$$u_1 \underbrace{(y''_1 + P(x)y'_1 + Q(x)y_1)}_{=0} + u_2 \underbrace{(y''_2 + P(x)y'_2 + Q(x)y_2)}_{=0} + u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = G(x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = G(x) & \text{نتیجه معادله بالا} \\ u'_1 y_1 + u'_2 y_2 = 0 & \text{فرض} \end{cases}$$

یک دستگاه دو معادله دو مجهول داریم که با حل آن خواهیم داشت :

$$y_p = (-y_1)\int \frac{G(x) y_2 \, dx}{\omega} + y_2 \int \frac{G(x) y_1 \, dx}{\omega}$$

راه کلی حل معادلات مرتبه ی دوم ناهمگن $G(x) \neq 0$

برای حل چنین معادلاتی فرض می کنیم که $G(x)$ مساوی صفر است و جواب همگن آنرا به صورت y_1, y_2 بدست می آوریم و با داشتن y_1, y_2 جواب خصوصی به صورت زیر بدست می آید:

$$y_p = C_1 y_1 \int \frac{\omega_1}{\omega} G(x)dx + C_2 y_2 \int \frac{\omega_2}{\omega} G(x)dx$$

که در آن رانسکین ها بصورت زیر است:

$$\omega = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}, \omega_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ 1 & y'_2 \end{vmatrix}, \omega_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & 1 \end{vmatrix}$$

و برای تعداد دفعات بیشتر چنین داریم :

$$\omega = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 & \cdots & y'_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^n & y_2^n & y_3^n & \cdots & y_n^n \end{vmatrix}, \omega_1 = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & y_n \\ 0 & \cdots & y'_n \\ 0 & \cdots & y''_n \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & y_n^n \end{vmatrix}$$

همانطور که قبلاً گفته شد جواب خصوصی y_p بر اساس معادله مشخصه و $G(x)$ بدست می آید. بنابراین برای حل این مسائل ابتدا $G(x)$ را برابر صفر قرار داده و $\boldsymbol{y_h}$ را بدست می آوریم. جواب خصوصی از جدول ۱ بدست می آید.

راه حل خاص معادلات مرتبه ی دوم ناهمگن $G(x) \neq 0$

در صورتیکه $G(x)$ یکی از حالات جدول ۱ را داشته باشد می توان از این جدول برای یافتن جواب استفاده کرد. خصوصیات کلی $G(x)$ در این معادلات این است که بصورت چند جمله ایست و معمولا کسری نمی باشد. با حل معادلات از این طریق باید ضرایب جواب خصوصی_ y_p با قرار دادن جواب در معادله اصلی بدست آید.

جدول۱ – بدست آوردن جواب خصوصی معادله دیفرانسی مرتبه دوم خطی ناهمگن $ay'' + by' + cy = G(x)$

S	y_p	G(x)
تعداد ریشه های برابر صفر معادله مشخصه	$x^s(B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx^n)$	$(\mathbf{A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_nx^n) = P_n(x)}$
تعداد ریشه های برابر α معادله مشخصه	$x^s e^{\alpha x}(B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx^n)$	$\mathbf{e^{\alpha x}P_n(x)}$
تعداد ریشه های برابر $\alpha \pm \beta i$ معادله مشخصه	$\mathbf{x^s e^{\alpha x}(B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx^n)(C_1 \sin\beta x + C_2 \cos\beta x)}$	$\mathbf{e^{\alpha x}P_n(x)\sin\beta x}$ یا $\mathbf{e^{\alpha x}P_n(x)\cos\beta x}$

برای بدست آوردن y_p به اینصورت عمل می شود که اگر $G(x)$ دارای چند جمله ای از درجه ۲ بود یعنی A_2x^2 در این صورت y_p دارای چند جمله ای $B_0 + B_1x + B_2x^2$ می باشد و به همین ترتیب اگر دارای چند جمله ای از درجه ۱ بود یعنی A_1x^1 در این صورت y_p دارای چند جمله ای $(B_0 + B_1x)$ و اگر دارای چند جمله ای از درجه ۰ بود یعنی A_0 در این صورت y_p دارای جمله B_0 خواهد بود.

برای بدست آوردن ضرائب y_p یعنی $\mathbf{B_0, B_1, B_2, \dots, B_n}$ از y_p مشتق گرفته و در معادله اصلی قرار می دهیم و از برابری دو طرف رابطه ضرائب ثابت بدست می آید. (جواب خصوصی هیچگاه به صورت پارامتری با ضرائب نامشخص نخواهد بود).

مثال ۱۶) معادله زیر را حل کنید.

$$y'' + 16y = e^{3x}\sin x$$

حل : همانطور که قبلاً گفته شد جواب خصوصی y_p بر اساس معادله مشخصه معادله همگن و G(x) بدست می آید. بنابراین برای حل این مسئله ابتدا G(x) را برابر صفر قرار می دهیم و y_h را بدست آوریم. یعنی

$$y'' + 16y = 0$$

بر اساس مثال ۱۴ داریم $\mathbf{y_h = (A\sin 4x + B\cos 4x)}$ و ریشه های معادله مشخصه بصورت $\mathbf{0 \pm 4i}$ می باشد. برای بدست آوردن جواب خصوصی از جدول ۱ کمک می گیریم. در این رابطه براساس $G(x)$ ، α=۳ و β=۱ یعنی $\alpha \pm \beta i$ برابر $3 \pm i$ بوده در حالیکه جواب معادله مشخصه $0 \pm 4i$ می باشد پس S=0 می باشد.

$$P_n(x) = 1\,, s = 0 \;\Rightarrow\; y_p = e^{3x}A_0(c_1\sin x + c_2\cos x\,)$$

در نتیجه جواب به صورت زیر خواهد بود :

$$y_\mathrm{p} = \mathrm{e}^{3\mathrm{x}}(\mathrm{D}_1\sin\mathrm{x} + \mathrm{D}_2\cos\mathrm{x})$$

برای بدست آوردن D_2 و D_1 از y_p دو بار مشتق می گیریم و در معادله اصلی می گذاریم:

مشتق اول

$$y'_p = 3e^{3x}(\mathrm{D}_1\sin\mathrm{x} + \mathrm{D}_2\cos\mathrm{x}) + \mathrm{e}^{3\mathrm{x}}(\mathrm{D}_1\cos\mathrm{x} - \mathrm{D}_2\,sin\,\mathrm{x})$$

$$y'_p = e^{3x}\left(\left(\underbrace{3D_1 - D_2}_{M}\right)\sin x + \left(\underbrace{3D_2 + D_1}_{N}\right)\cos x\right)$$

$$y'_p = e^{3x}(M\sin x + N\cos x)$$

مشتق دوم

$$y''_p = 3e^{3x}(M\sin x + N\cos x) + e^{3x}(M\cos x - N\sin x)$$

$$y''_p = e^{3x}[(3M - N)\sin x + (3N + M)\cos x] =$$

$$e^{3x}(9D_1 - 3D_2 - 3D_2 - D_1)\sin x + e^{3x}(9D_2 + 3D_1 + 3D_1 - D_2)\cos x$$

$$= e^{3x}((8D_1 - 6D_2)\sin x + (8D_2 + 6D_1)\cos x$$

حال y''_p, y'_p, y_p را در معادله اصلی قرار می دهیم :

$$y'' + 16y = e^{3x}((8D_1 - 6D_2)\sin x + (8D_2 + 6D_1)\cos x + 16(e^{3x}(D_1\sin x + D_2\cos x) =$$

$$3e^{3x}[(8D_1 - 6D_2 + 16D_1)\sin x + (8D_2 + 6D_1 + 16D_2)\cos x] = \underbrace{e^{3x}\sin x}_{G(x)}$$

از برابری دو طرف تساوی داریم :

$$\Rightarrow \begin{cases} 24D_1 - 6D_2 = 1 \\ 24D_2 + 6D_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow D_1 = -4D_2 \Rightarrow \begin{cases} D_1 = \frac{4}{102} \\ D_2 = -\frac{1}{102} \end{cases}$$

بنابراین

$$\Rightarrow y = e^{3x}\left(\frac{4}{102}\sin x - \frac{1}{102}\cos x\right) + (A_0\sin 4x + B_0\cos 4x)$$

مثال ۱۷) معادله زیر را حل کنید.

$$y'' + 4y' + 4y = x^3e^{-2x}$$

مرحله اول : ابتدا فرض می کنیم G(x)=0 و معادله به صورت $y'' + 4y' + 4y = 0$ تبدیل می شود .این معادله یک معادله مرتبه دوم با ضرائب ثابت و معادله مشخصه $r^2 + 4\mathrm{r} + 4 = 0$ می باشد.

مرحله دوم (بدست آوردن r) :

$$r = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = -2$$

مرحله سوم (محاسبه Δ) : چون $\Delta = 0$ می باشد ما دارای دو جواب متفاوت $\begin{cases} y_1 = e^{-2x} \\ \mathrm{y}_2 = \mathrm{xe}^{-2x} \end{cases}$ می باشیم.

مرحله چهارم محاسبه رانسکین (ω) :

$$\omega = \begin{vmatrix} r_1 & \cdots & r_2 \\ r'_1 & \cdots & r'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-2x} & \cdots & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & \cdots & e^{-2x} - 2xe^{-2x} \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{-2x}(\mathrm{e}^{-2x} - 2\mathrm{xe}^{-2x}) — 2\mathrm{e}^{-2x}(\mathrm{xe}^{-2x}) = \mathrm{e}^{-4x} - 2\mathrm{xe}^{-4x} + 2\mathrm{xe}^{-4x} = e^{-4x} = \omega$$

$$\omega_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-2x} \\ 1 & e^{-2x} - 2xe^{-2x} \end{vmatrix} \Rightarrow \omega_1 = -xe^{-2x}$$

$$\omega_2 = \begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ -2e^{-2x} & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \omega_{2=}e^{-2x}$$

مرحله پنجم محاسبه y_p :

$$y_p = -C_1 e^{-2x} \int \frac{xe^{-2x}}{e^{-4x}} (x^3 e^{-2x}) dx + C_2 x e^{-2x} \int \frac{e^{-2x}}{e^{-4x}} (x^3 e^{-2x}) dx$$

$$y_p = C_1 e^{-2x} \int (-x^4) dx + C_2 x e^{-2x} \int (x^3) dx$$

$$y_p = C_1 e^{-2x}\left(-\frac{x^5}{5}\right) + C_2 x e^{-2x}\left(\frac{x^5}{4}\right) \Rightarrow y_p = \frac{Ce^{-2x}x^5}{20}$$

$$\Rightarrow y = Ae^{-2x} + Bxe^{-2x} + \frac{Ce^{-2x}x^5}{20}$$

۲-۲- حل معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی با ضرائب متغیر

۲- ۲-۱- حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی با استفاده از سری ها

روش فروبینیوس

برای حل معادلات به روش سری فرض می کنیم جواب معادله به صورت یک سری نظیر $y = \sum a_n x^{n+c}$ می باشد. از این جواب در دو مرحله مشتق گرفته و نتایج را در معادله اصلی قرار می دهیم .حال چون جواب معادله صفر است بنابراین کلیه ضرائب معادله در دو طرف صفر خواهد بود. بنابراین ضرائب توانهای مختلف x را بدست آورده و مساوی صفر قرار می دهیم. به این روش $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$ براساس یکی از ضرائب نظیر a_0 بدست می آید به طوریکه بتوان آنرا به صورت یک سری نوشت .یعنی a_n به صورت یک تابعی از a_0 نوشته می شود.

معادله دیفرانسیل $\boxed{1}$ $\quad x^2\frac{d^2y}{dx^2} + xF(x)\frac{dy}{dx} + G(x)y = 0$ را در نظر بگیرید که در آن :

$$F(x) = F_0 + F_1 x + F_2 x^2 + \cdots$$

$$G(x) = G_0 + G_1 x + G_2 x^2 + \cdots$$

برای حل این معادله دیفرانسیل فرض کنید : $\boxed{y = \sum_0^\infty a_n x^{n+c}}$

و

$$\frac{dy}{dx} = \sum_0^\infty a_n (n+c) x^{n+c-1}$$

و

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{0}^{\infty}a_n(n+c)(n+c-1)x^{n+c-2}$$

با جایگزینی این معادلات در $\boxed{1}$ نتیجه می گیریم :

$$\mathrm{x}^2\sum a_n(n+c)(n+c-1)x^{n+c-2}+XF(x)\sum a_n(n+2)X^{n+c-1}+G(x)\sum a_nX^{n+c}=0$$

پایین ترین توان x که ظاهر می شود x^c است و با صفر قرار دادن مجموع ضرائب x^c نتیجه می گیریم :

$$\boxed{c^2+(\mathrm{F}_0-1)\mathrm{c}+\mathrm{G}_0=0}\qquad\boxed{2}$$

به این معادله درجه دوم ، **معادله اندیسی** می گویند .حال باید ضرائب a_2,a_1 و ... را نیز در چند جمله ای بدست آورد .

نکته : ضریب a_1 را با تعویض c با c+1 می توان بدست آورد .

بر اساس ریشه های **معادله اندیسی** حالت های متفاوتی وجود خواهد داشت :

حالت I) ریشه های معادله اندیسی متفاوتند ولی تفاضلشان یک عدد صحیح نیست .

کلیه ضریب ها براساس a_0 و C بدست می آیند. به ازاء هر ریشه ما یک رشته داریم با جمع دو رشته جواب بدست می آید .

مثال ۱۸) معادله زیر را با استفاده از روش سری ها حل کنید.

$$4x\frac{d^2y}{dx^2}+6\frac{dy}{dx}+y=0$$

با قرار دادن $y = \sum_0^\infty a_n x^{n+c}$ و مشتقات آن در معادله و صفر قراردادن ضرائب جملات توانهای مختلف X داریم :

$$4x\sum_0^\infty a_n(n+c)(n+c-1)x^{n+c-2} + 6\sum a_n(n+c)x^{n+c-1} + \sum a_n x^{n+c} = 0$$

حال چند جمله ای را باز می نماییم یعنی به جای n برابر 0 ، 1 ، 2 قرار می دهیم :

$$4xa_0c(c-1)x^{c-2} + 4xa_1(c+1)(c)x^{c-1} + 4xa_2(c+2)(c+1)x^c + 6a_0cx^{c-1} + 6a_1(c+1)x^c + 6a_2(c+2)x^{c+1} + a_0x^c + a_1x^{c+1} + a_2x^{c+2} = 0$$

حال چند جمله ای را مرتب نموده و ضرائب توانهای مختلف x را برابر صفر قرار می دهیم .جملات را طوری بنویسید که توانهای برابر زیر هم قرار گیرند

$$\begin{array}{lllll} 4a_0c(c-1)x^{c-1} & + 4a_1c(c+1)x^c & + 4a_2(c+2)(c+1)x^{c+1} & + \cdots & \\ + \quad 6a_0cx^{c-1} & + 6a_1(c+1)x^c & + 6a_2(c+2)x^{c+1} & & \\ + \quad 0 & + \quad a_0x^c & + \quad a_1x^{c+1} & = & 0 \end{array}$$

ضرایب x^{c-1}

$$\Rightarrow \; 4a_0c(c-1) + 6a_0c = 0$$

ضرایب x^c

$$\boxed{I} \qquad 4a_1c(c+1) + 6a_1(c+1) + a_0 = 0$$

ضرایب x^{c+1}

$$\boxed{\text{II}} \qquad 4a_2(c+2)(c+1)+6a_2(c+2)+a_1=0$$

کوچکترین توان مربوط به x^{c-1} می باشد بنابراین معادله :

$$\Rightarrow\ 4a_0c(c-1)+6a_0c=0$$

معادله اندیسی خواهد بود .که دارای دو ریشه $c=0$ و $c=-\frac{1}{2}$ می باشد .

هنگامیکه $c=0$ باشد از معادلات بالا داریم :

$$\boxed{I} \qquad 6a_1+a_0=0\ \rightarrow\ a_1=\frac{-a_0}{6}$$

$$\boxed{II} \qquad 4a_2(2)(1)+6a_2(2)+a_1=0\ \rightarrow\ a_2=\frac{-a_1}{20}$$

به همین ترتیب برای بدست آوردن رابطه ای که ضرائب مختلف a_n را به هم مربوط می نماید کافیست در جمله II به جای عدد *1* ، r قرار دهیم .به این صورت $r+1=2$ و $r-1=0$ می باشد، بنابراین از *II* داریم :

$$4a_{r+1}(c+r+1)(c+r)+6a_{r+1}(c+r+1)+a_r=0$$

$$\rightarrow\ \frac{a_{r+1}}{a_r}=\frac{-1}{(2r+2)(2r+3)}$$

$$\frac{a_r}{a_{r-1}}=\frac{-1}{(2(r-1)+2)(2(r-1)+3)}=\frac{-1}{(2r)(2r+1)}$$

$$\frac{a_{r+1}}{a_{(r-1)}}=\frac{(-1)^2}{(2r+3)(2r+2)(2r+1)(2r)}$$

به این ترتیب

$$\boxed{\frac{a_r}{a_0}=\frac{(-1)^r}{(2r+1)!}}$$

و در نتیجه

$$a_n=\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\ a_0$$

و داریم

$$y=\sum\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}a_0x^n$$

$$y=a_0\left(1-\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{5!}-\frac{x^3}{7!}+\cdots\right)=a_0\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

به همین ترتیب با قرار دادن $c=-\frac{1}{2}$ داریم :

$$y_2=a_0\left(\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)$$

لذا جواب عمومی به صورت زیر خواهد بود:

$$y=\frac{A\sin\sqrt{x}+B\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

حالت II) ریشه های معادله اندیسی با هم برابرند :

$$y=\alpha u(x,c_1)+\beta\left(\frac{\partial u}{\partial c}\right)_{c=c_1}$$

مثال ۱۹) معادله دیفرانسیل زیر را به روش سری ها حل نمایید :

$$\boldsymbol{x\frac{d^2y}{dx^2}+(1-x)\frac{dy}{dx}-y=0}$$

$$y = \sum_{0}^{\infty} a_n x^{n+c}$$

با قرار دادن y و مشتقات آنها در رابطه و صفر قرار دادن مجموع ضرائب x^{c+1}, x^{c}, x^{c-1} نتیجه زیر بدست می آید :

$$a_0 c(c-1) + a_0 c = 0$$ معادله اندیسی

$$a_1 (c+1)^2 = a_0 (c+1)$$

$$a_{r+1} (r+c+1)^2 = a_r (r+c+1)$$

از معادله اندیسی نتیجه می گیریم که :

$$a_0 c^2 - a_0 c + a_0 c = 0$$

در نتیجه معادله اندیسی یک ریشه مضاعف دارد: c=0

$$a_{r+1} = \frac{a_r}{r+c+1} \quad \cdots\cdots \quad a_{r+1} = \frac{a_0}{(r+c+1)(r+c)\ldots(c+1)}$$

$$\rightarrow\ a_n = \frac{a_0}{(n+c)(n+c-1)\ldots(c+1)}$$

$$\Rightarrow\ y = \sum_{0}^{\infty} \frac{a_0 x^{n+c}}{(n+c)(n+c-1)\ldots(c+1)}$$

وقتی $C=0$ باشد:

$$y_1 = \mathrm{U}(\mathrm{x}, 0) = \mathrm{a}_0 \left[1 + \mathrm{x} + \frac{\mathrm{x}^2}{2!} + \frac{\mathrm{x}^3}{3!} + \cdots\right] = \mathrm{a}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{x}}$$

$$y_2 = \frac{\partial}{\partial c}\left[a_0 \sum_0^{\infty} \frac{x^{n+c}}{(c+1)(c+2)+\cdots(c+n)}\right]_{c=0}$$

یادآوری ۶ :

$$\mathrm{x}^{\mathrm{n+c}} = \mathrm{e}^{\mathrm{n+c_0}\ln x}$$

یادآوری ۷ :

اگر $y = f_1(c).f_2(c).f_3(c) \ldots f_r(c)$ آنگاه $\ln y = \ln f_1(c) + \ln f_2(c) + \cdots$

مشتق گیری از دو طرف و ضرب در y داریم :

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{f'_1(c)}{f_1(c)} + \frac{f'_2(c)}{f_2(c)} + \cdots + \frac{f'_r(c)}{f_r(c)}\right]$$

$$f_1(c) = \frac{1}{c+1} \quad , \quad f_n(c) = \frac{1}{c+n} \quad , \quad f_{n+1}(c) = e^{n+c}\ln x$$

$$\frac{f'_{(c)}}{f_1(c)} = \frac{-1}{c+1} \ldots \frac{f'_{n+1}}{f_{n+1}} = \ln x$$

$$y_2 = \left[a_0 \sum_0^{\infty} \frac{x^{n+c}}{(c+1)(c+2)\ldots(c+n)}\left(\frac{-1}{c+1} - \frac{1}{c+2} - \cdots - \frac{1}{c+n} + \ln x\right)\right]_{c=0}$$

$$= a_0 \textstyle\sum_0^{\infty} \frac{x^n}{n!}\ln x - a_0 \sum_1^{\infty} \frac{x^n}{n!}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$

$$= a_0 e^x \ln x - a_0 \sum_1^{\infty} \frac{x^n}{n!}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$

حالت III) اختلاف بین ریشه ها ۲ عدد صحیح است ؛

$$y = A\,u(x,c_2) + B\frac{\partial}{\partial c}[(c-c_1)u(x,c)]_{c=c_1}$$

مثال ۲۰) معادله دیفرانسیل زیر را به روش سری ها حل نمایید :

$$x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} + (2-5x)\frac{dy}{dx} - 4y = 0$$

$$y = \sum_0^\infty a_n x^{n+c} \quad , \quad y' = \sum_0^\infty a_n (n+c) x^{n+c-1} \quad ,$$

$$y'' = \sum_0^\infty a_n (n+c)(n+c-1) x^{n+c-2}$$

$$\sum_0^\infty a_n (n+c)(n+c-1)x^{n+c} - \sum_0^\infty a_n (n+c)(n+c-1)x^{n+c-1} + 2\sum_0^\infty a_n (n + c)x^{n+c-1} - 5\sum_0^\infty a_n (n+c)x^{n+c} - 4\sum_0^\infty a_n x^{n+c} = 0$$

$$\Rightarrow -a_0 c(c-1) + 2a_0 c = 0 \ \Rightarrow \ c = 0 \qquad , \qquad c = -1$$

وقتی تفاضل ریشه های معادله اندیسی برابر عدد صحیح باشد ، مشکلات از اولین رابطه بازگشتی که در آن a_y است ظاهر می شود. در اینجا تفاضل برابر ۱ است و در a_1 ما دچار مشکل می شویم .

با قرار دادن ضرائب x^{n+c} برابر صفر داریم :

$$a_1(c+1) = a_0(c+2)$$

$$a_1 = \frac{c+2}{c+1} a_0$$

وقتی c برابر 1- باشد داریم :

$$a_1 = \infty$$

بنابراین به ازای $c = -1$ رشته دارای ارزش نیست و به ازاء $c = 0$ باید مسئله را دنبال کنیم و …

$$a_{\mathrm{r}+1} = \frac{\mathrm{r+c+2}}{\mathrm{c+1}} a_0 \text{ رابطه بازگشتی } \Rightarrow \boxed{u(x,c) = \sum \frac{x+c+1}{c+1} a_0 x^{n+c}}$$

$$C = 0 \Rightarrow \ a_{r+1} = (r+2)a_0$$

$$y_1 = \sum (n+1) a_0 x^n = a_0(1 + 2x + 3x^2 + \cdots) = a_0(1-x)^{-2}$$

$$y_2 = \frac{\partial}{\partial c}[(c+1)u(x,c)]_{c=-1} = \frac{\partial}{\partial c}\left[\sum_0^\infty (n+c+1) a_0 x^{n+c}\right]_{c=-1}$$

$$= y\left[\frac{\acute{f}_1(c)}{f_1(c)} + \cdots + \ln x\right]$$

$$= \sum (a_0(n+c+1)x^{n+c}\left[\frac{1}{c+1} + \frac{1}{c+2} + \cdots + \ln x\right]_{c=-1}$$

$$= (\sum a_0(n+c+1)x^{n+c}\left[\frac{1}{n+c+1} + \ln x\right])_{c=-1}$$

$$= (\sum a_0 x^{n+c}[1 + (n+c+1)\ln x])_{c=-1} = \sum a_0 x^{n-1}[1 + n \ln x]$$

مثال ۲۱) معادله زیر را حل کنید. (این نوع معادلات معادلات بسل نام دارد).

$$\mathrm{x}^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0 \qquad\qquad x > 0$$

با استفاده از روش فروبینیوس

$$r^2 - \nu^2 = 0$$ "معادله مشخص"

$$\Rightarrow r_2 = -\nu \quad , \quad r_1 = \nu$$

$$(r^2 + 2r + 1 - \nu^2)a_1 = 0$$

$$\Rightarrow (n + r + \nu)(n + r - \nu)a_n = -a_{n-2} \qquad n = 2,3,4, \dots$$

$$(\nu^2 + 2\nu + 1 - \nu^2)a_0 = 0 \rightarrow (2\nu + 1)a_0 = 0 \rightarrow a_0 = 0$$

حال برای ریشه $r_1 = \nu$ داریم $a_1 = 0$

$$a_n = \frac{-1}{(n+r+\nu)(n+r-\nu)} a_{n-2}$$

در نتیجه $a_3 = a_5 = \cdots = 0$

با جایگذاری 2n به جای n برای ریشه های زوج داریم :

$$a_{2n} = \frac{-1}{4n(n+\nu)} a_{2n-2} \quad , \quad n = 1,2, \dots$$

با قراردادن n-1 به جای n و …

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{4^n\, n!\,(1+\nu)(2+\nu)\dots(n+\nu)} a_0 = \frac{\left(\frac{-1}{4}\right)^n a_0 \Gamma(\nu+1)}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)}$$

با توجه به اختیاری بودن a_0 داریم :

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$$

$$\xrightarrow{\text{در نتیجه داریم}} y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\ \Gamma(n+\nu+1)4^n 2^\nu} x^{2n} x^\nu$$

تابع بسل نوع اول از مرتبه ν

$$y_1 = J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\ \Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}$$

الف) اگر ν عدد طبیعی یا صفر نباشد :

تابع بسل نوع اول از مرتبه (ν-)

$$y_2 = J_{-\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\ \Gamma(n-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\nu}$$

$$y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x)$$

در صورتیکه ν عدد حسابی باشد آن را بطور معمول با n نمایش می دهند. در این شرایط J_n و J_{-n} استقلال خطی ندارند

$$\mathrm{J}_{-\mathrm{n}}(\mathrm{x}) = (-1)^{\mathrm{n}} \mathrm{J}_{\mathrm{n}}(\mathrm{x})$$

یادآوری ۸ : تابع گاما

$$\Gamma(x) = \int_{0}^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \, dt$$

به ازاء $x > 0$ همگراست .

$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^0 \, dt = 1$

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(0) =$ تعریف نشده , $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$,

$\Gamma(n) = (n-1)!$

مثال ۲۲) $\Gamma(\frac{5}{2})$ را محاسبه کنید .

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} * \frac{1}{2} * \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} * \frac{1}{2} * \sqrt{\pi}$$

ب) اگر $\nu=0$ باشد : (تابع وبر)

$$Y_\nu(x)=\frac{2}{\pi}\left[\ln\frac{1}{2}x+y\right]J_\nu(x)-\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\nu-1}\frac{\nu-n-1}{n!}\left(\frac{1}{2}x\right)^{2n-\nu}$$
$$-\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\nu}}{n!\,(n+\nu)!}\left[1+\tfrac{1}{2}+\dots+\tfrac{1}{n}+1+\tfrac{1}{2}+\dots+\tfrac{1}{n+\nu}\right]$$

$y=0.۵۷۷۲۱۵۶۶$ ثابت اویلر

$y_2=BY_0(x)$

ج) اگر ν یک عدد صحیح باشد :

$$y_2=BY_\nu(x)$$

بنابراین جواب معادله را می توان بصورت زیر نوشت :

اگر ν یک عدد صحیح یا صفر نباشد

$$y=AJ_\nu(x)+J_{-\nu}(x)$$

اگر ν یک عدد صحیح یا صفر باشد

$$y=AJ_\nu(x)+BY_\nu(x)$$

مثال ۲۳) معادله زیر را حل کنید. (این نوع معادلات معادلات بسل تعمیم یافته نام دارد).

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-(x^2-\nu^2)y=0$$

به جای x ما ix قرار می دهیم .

$$y=AJ_\nu(ix)+BJ_{-\nu}(ix)\qquad or\qquad y=AJ_\nu(ix)+BY_\nu(ix)$$

و پس از ساده سازی داریم :

$$\underbrace{y = C_1 I_\nu(x) + C_2 I_{-\nu}(x)}_{\text{صفر یا صحیح نباشد } \nu} \qquad or \qquad \underbrace{y = C_1 I_\nu(x) + C_2 K_\nu(x)}_{\text{عدد طبیعی یا صفر } \nu}$$

$$\boxed{I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{x}{2})^{\nu+2k}}{K!\,(n+k)!}}$$

$$K_\nu(x) = (-1)^{n+1}\left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma\right] I_\nu(x) +$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k-1)(\frac{x}{2})^{2k-n} + \frac{(-1)^n}{2}\sum\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!}\phi(k)+\phi(n+k)$$

ثابت اویلر γ

$$\gamma = \lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{m} - \ln m\right) = 0.5772$$

$$\phi(p) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p} \qquad , \qquad \phi(0) = 0$$

خواص توابع بسل

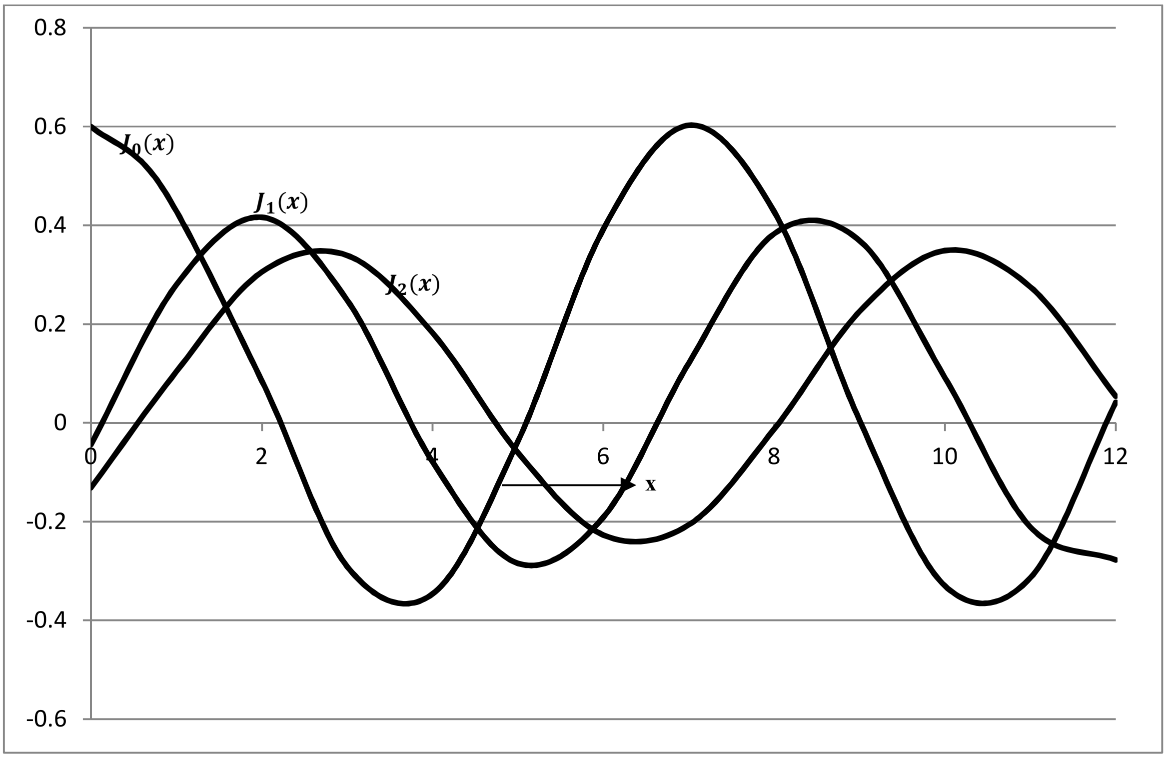
الف- ریشه های معادله بسل

توابع $j_n(x)$ و $y_n(x)$ ریشه های زیادی دارند که مقادیر عددی آنها در هند بوک های ریاضی موجود است.

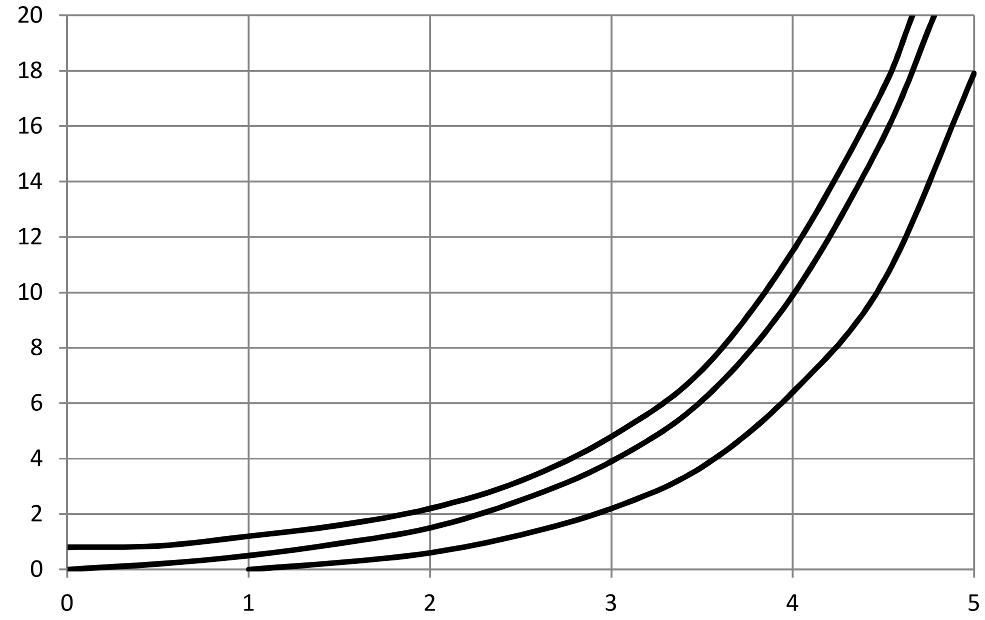
تعدادی از این ریشه ها در جدول ۲ ارائه شده است.

جدول ۲- تعدادی از ریشه های $J_0(x)$ و $Y_0(x)$

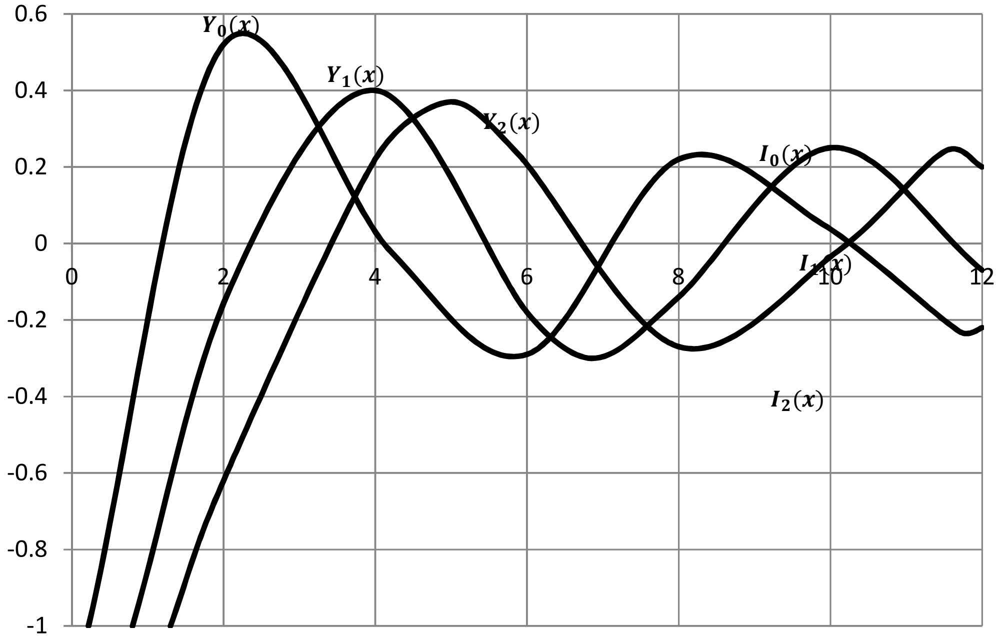
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$J_0(x) = 0$	2.404	5.502	8.653	11.791	14.93	18.071
$Y_0(x) = 0$	0.893	3.957	7.086	10.222	13.361	16.500



شکل ۱- تابع J (x)



شکل ۲- تابع I (x)



شکل ۳- تابع Y(x)

شکل ۴- تابع K (x)

ب- مقدار تابع بسل

برای x های بزرگ :

$$J_n(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x-\frac{\pi}{4}-\frac{n\pi}{2})$$

$$Y_n(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin(x-\frac{\pi}{4}-\frac{n\pi}{2})$$

$$I_n(x) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{x}$$

$$K_n(x) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-x}$$

برای x های کوچک :

$$\mathrm{J_n}(\mathrm{x}) \cong \frac{1}{2^n n!} x^n$$

$$Y_n(x) \cong \frac{-2^n(n-1)!}{\pi} x^{-n} \quad , \quad n \neq 0 \;\; , \;\; Y_0(x) \cong \frac{2}{\pi} \ln x$$

$$I_n(x) \cong \frac{1}{2^{\mathrm{n}} \mathrm{n}!} \mathrm{x}^{\mathrm{n}}$$

$$K_n(x) \cong 2^n (n-1)!\, x^n \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad K_0(x) \cong -\ln x$$

پ - برخی از رابطه های جبری بین مرتبه های مختلف توابع بسل

$$\mathrm{J_{n+1}}(\mathrm{x}) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x)$$

$$Y_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} Y_n(x) - Y_{n-1}(x)$$

$$I_{n+1}(x) = -\frac{2n}{x} I_n(x) + I_{n-1}(x)$$

$$K_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} K_n(x) + K_{n-1}(x)$$

ت – مشتق برخی از توابع بسل

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}[\mathrm{x}^{\upsilon} \mathrm{Z}_{\upsilon}(\mathrm{mx})] = \begin{cases} \mathrm{mx}^{\upsilon} \mathrm{Z}_{\upsilon-1}(\mathrm{mx}) & , \quad \mathrm{Z = J, Y, I} \\ -\mathrm{mx}^{\upsilon} \mathrm{Z}_{\upsilon-1}(\mathrm{mx}) & , \quad \mathrm{Z = K} \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-\upsilon} Z_{\upsilon}(mx)] = \begin{cases} -mx^{-\upsilon} Z_{\upsilon+1} & , \quad Z = J, Y, K \\ mx^{-\upsilon} Z_{\upsilon+1}(mx) & , \quad Z = I \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}[Z_v(mx)] = \begin{cases} mZ_{v-1}(mx) - \left(\frac{v}{x}\right) Z_v(mx) \quad , \quad Z = J, Y, I \\ -mZ_{v-1}(mx) - \left(\frac{v}{x}\right) Z_v(mx) \quad , \quad Z = K \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}[Z_v(mx)] = \begin{cases} -mZ_{v+1}(mx) + \left(\frac{v}{x}\right) Z_v(mx) \quad , \quad Z = J, Y, K \\ mZ_{v+1}(mx) + \left(\frac{v}{x}\right) Z_v(mx) \quad , \quad Z = I \end{cases}$$

ث – برخی از رابطه های بین مشتق و مرتبه های مختلف توابع بسل

$$J'_n(x) = \frac{1}{2}[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)]$$

$$xJ'_n(x) = xJ_{n-1}(x) - nJ_n(x)$$

$$xJ'_n(x) = nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x)$$

نکته :رابطه های بالا، برای تابع $Y_{\mathrm{n}}(\mathrm{x})$ نیز صادق است .

$$I'_{\mathrm{n}}(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}[\mathrm{I}_{\mathrm{n}-1}(\mathrm{x}) + \mathrm{I}_{\mathrm{n}+1}(\mathrm{x})]$$

$$xI'_n(x) = xI_{n-1}(x) - nI_n(x)$$

$$xI'_n(x) = xI_{n+1}(x) + nI_n(x)$$

$$K'_n(x) = -\frac{1}{2}[K_{n-1}(x) + K_{n+1}(x)]$$

$$nK'_n(x) = -xK_{n-1}(x) - nK_n(x)$$

$$nK'_n(x) = nK_n(x) - xK_{n+1}(x)$$

ج – رابطه هایی برای انتگرال توابع بسل

$$\int xJ_0(x)dx = xJ_1(x)$$

$$\int J_1(x)dx = -J_0(x)$$

$$\int x^n J_{n-1}(x)dx = x^n J_n(x)$$

$$\int x^{-n} J_{n+1}(x)dx = -x^n J_n(x)$$

$$\int x^m J_n(x)dx = -x^m J_{n-1}(x) + (m+n-1)\int x^{m-1} J_{n-1}(x)dx$$

$$\int xJ_n(\alpha x)J_n(\beta x)dx = \frac{x[\alpha J_n(\beta x)J'_n(\alpha x) - \beta J_n(\alpha x)J'_n(\beta x)]}{\beta^2-\alpha^2}$$

$$\int x{J_n}^2(\alpha x)dx = \frac{x^2}{2}[J'_n(\alpha x)]^2 + \frac{x^2}{2}(1-\frac{n^2}{\alpha^2 x^2})[J_n(\alpha x)]^2$$

روش بسل

در حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی با استفاده از سری ها شکل خاصی از معادلات مورد بررسی قرار گرفت که به معادلات بسل معرف بود (مثال ۲۰ و ۲۲) . شکل کلی معادلات بسل از معروف ترین معادلات مرتبه دوم همگن می باشند که در شکل های مختلف بیان شده و در مراجع مختلف بخصوص کتاب های انتقال حرارت که اکثر فرایندهای آن منجر به این گونه معادلات می گردد مورد استفاده قرار گرفته است. ساده ترین آن به شکل کلی زیر می باشد :

$$\boxed{\mathbf{x^2y'' + \alpha x y' + (m^2x^\beta + \eta)y = 0}} \quad (۵)$$

پاسخ این معادله به صورت زیر می باشد.

$$y_{(x)}=\sum_{1}^{2}C_n x^{\frac{\lambda}{\mu}}.Z_v\left(|m|\mu x^{\frac{1}{\mu}}\right)$$

$$\lambda=\frac{1-\alpha}{\beta}$$

$$\mu=\frac{2}{\beta}$$

$$v=\mu\sqrt{(\frac{\lambda}{\mu})^2-\eta}$$

می باشد و مقدار z براساس v و m از جدول ۳ بدست می آید.

جدول ۳- حل معادلات بسل

m	v	Z_1	Z_2
حقیقی	غیر صحیح	J_v	$\boldsymbol{J_{-v}}$
	صحیح	J_v	$\boldsymbol{I_v}$
مختلط	غیر صحیح	Y_v	$\boldsymbol{Y_{-v}}$
	صحیح	$\boldsymbol{Y_v}$	$\boldsymbol{K_v}$

بنابراین برای حل این نوع معادلات اولین گام بدست آوردن α ، β ، m و η می باشد سپس مقدار μ ، λ و v را بدست آورده و از جدول مقدار Z_1 و Z_2 را خوانده و به صورت $y=C_1Z_1+C_2Z_2$ می نویسیم .

مثال ۲۴) معادله زیر را حل نمایید.

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}-4xy=0$$

حل :

با استفاده از استراتژی حل این نوع معادلات داریم :

$$\alpha = 2 , \beta = 1 , \lambda=\frac{1-\alpha}{\beta} = -1 , \mu=2 , v = 2\sqrt{(-{}^{1}/_{2})^2} = -1$$

با توجه به اینکه زیر رادیکال هم منفی و هم مثبت صحیح می باشد ، برای انتخاب جواب مناسب ،رادیکال را با توان ۲ حذف می کنیم که جواب منفی باقی می ماند .

$$m^2 = -4 \Rightarrow m = \sqrt{-4} = \pm 2i$$

طبق نتایج m مختلط و v صحیح می باشد در نتیجه :

$$y_h = x^{-\frac{1}{2}}\left[C_1 Y_{-1}\left(4\sqrt{x}\right) + C_2 K_{-1}(4\sqrt{x})\right]$$

مثال ۲۵) معادله زیر را حل کنید.

$$4x^2 y'' + 2xy' + 4x^2 y = 0$$

حل :

برای حل ابتدا باید به شکل معادلات بسل در آوریم در نتیجه معادله بر ۴ تقسیم می گردد. براساس استراتژی تدوین شده داریم :

$$x^2 y'' + {}^{1}/_{2}\, xy' + xy'' = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} , \beta = 2 , \lambda = \frac{1-\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} , \mu = \frac{2}{2} = 1$$ و

$$|m| = 1$$

$$v = \mu\sqrt{(\frac{\lambda}{\mu})^2 - \eta} = \lambda = \frac{1}{4}$$

که در آن v غیر صحیح و m حقیقی می باشد پس در نتیجه جواب به صورت زیر می باشد.

$$y(x) = x^{\frac{1}{4}}\left[C_1 J_{\frac{1}{4}}(x) + C_2 J_{-\frac{1}{4}}(x)\right]$$

۲-۲-۲- حل معادلات مرتبه دوم خطی همگن با ضرایب متغیر به روش کوشی و اویلر

$$\boxed{x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0} \quad (۶)$$

معادله به شکل معادله ۶ معادله کوشی و اویلر نام دارد که در این معادلات ضریب y فاقد x می باشد. برای حل اینگونه معادلات، ابتدا معادله مشخصه را تشکیل داده و مقدار r را بدست می آوریم.

معادله مشخصه: $$r(r-1) + \alpha r + \beta = 0$$

$$\Rightarrow\ r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0\ \Rightarrow\ \Delta = (\alpha - 1)^2 - 4\beta\ \Rightarrow\ r = \frac{-(\alpha-1) \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

و براساس مقدار r و Δ سه پاسخ متفاوت به شکل زیر بدست می آید :

$$\begin{cases} \Delta > 0 :\ r_1\ ,\ r_2\ \rightarrow\ y = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2} \\ \Delta = 0 : \mathrm{r}\ \rightarrow\ \mathrm{y} = \mathrm{x}^{\mathrm{r}}(\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 \ln \mathrm{x}) \\ \Delta < 0 : r = v \pm \mu i\ \rightarrow\ \mathrm{y} = \mathrm{x}^{\mathrm{v}}[\mathrm{C}_1 \sin(\mu \ln \mathrm{x}) + \mathrm{C}_2 \cos(\mu \ln \mathrm{x})] \end{cases}$$

مثال ۲۶) معادله زیر از نوع کوشی اویلر است، ابتدا آنرا معادل سازی و سپس آنرا حل کنید.

$$x^2 y'' + 3xy' + 5y = 0$$

با توجه به نوع شکل معادله، معادله از نوع کوشی اویلر می باشد که در آن $\alpha = 3$ و $\beta = 5$ می باشد در نتیجه معادله مشخصه آن بصورت زیر است:

$$r^2 + (3-1)r + 5 = 0$$

جوابهای این معادله به شکل زیر بدست می آید:

$$\Delta = (3-1)^2 - 4 * 5 = 4 - 20 = -16 < 0\,, r = \frac{-(3-1) \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$$

در نتیجه داریم :

$$\Delta < 0\,, \begin{cases} v = -1 \\ \mu = 2 \end{cases}$$

براساس مطالب گفته شده شکل سوم معادلات کوشی اویلر می باشد و جواب به صورت :

$$y = (C_1 \sin(2\ln x) + C_2 \cos(2\ln x))x^{-1}$$

مثال ۲۷) معادله $x^2 y'' + 5xy' + 4y = 0$ را همانند مثال قبل حل کنید.

$$r^2 + 4r + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = -2 \\ \Delta = 0 \end{cases} \Rightarrow y = (C_1 + C_2 \ln x)x^{-2}$$

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم غیر خطی

(حالت عمومی ندارد-چند حالت خاص بررسی می شود)

الف) اگر معادله دیفرانسیل فاقد y باشد .[معادله ای می سازیم فاقد y باشد]

مثال ۲۸) معادله زیر را حل کنید .

$$\boldsymbol{\frac{d^2y}{dx^2} = x(\frac{dy}{dx})^3}$$

$$\xrightarrow{\text{تغییر متغیر می دهیم}} p = \frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} \Rightarrow \frac{dp}{dx} = xp^3$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{p^3} = x\,dx \Rightarrow -\frac{1}{2}p^{-2} = \frac{1}{2}x^2 + k_1 \rightarrow p^2 = \frac{1}{2k_1 - x^2}$$

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2k_1 - x^2}} \rightarrow dy = \frac{dx}{\sqrt{2k_1 - x^2}} \Rightarrow y = \pm\sin^{-1}(\frac{x}{2k_1}) + k_2$$

ب) اگر معادله دیفرانسیل فاقد x باشد . (معادله ای می سازیم فاقد x باشد)

$$p = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}.\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$

مثال ۲۹) معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید .

$$\boldsymbol{y\frac{d^2y}{dx^2} + 1 = (\frac{dy}{dx})^2}$$

$$yp\frac{dp}{dy} + 1 = p^2 \Rightarrow \frac{p\,dp}{p^2-1} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \frac{1}{2}\ln(p^2-1) = \ln y + \underbrace{\ln a}_{k_1} = \ln(ya)$$

$$\rightarrow \sqrt{p^2-1} = ay \Rightarrow p = \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{1+a^2y^2} \Rightarrow$$

$$x = \frac{1}{a}\operatorname{arcsinh}(ay) + k_2 \rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{a}\sinh(k+ay) \\ y = \dfrac{1}{a}\sinh(k-ay) \end{cases}$$